ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

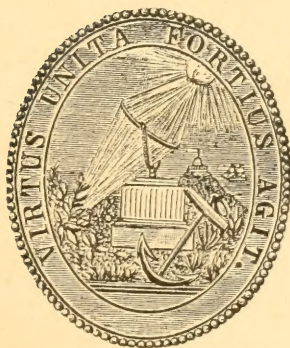
PORTO

PUBLICADOS SOB A DIRECÇÃO

DE

F. GOMES TEIXEIRA

VOLUME VI

(Publicação official)

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1911

NOTE SUR LES FONCTIONS DE BERNOULLI

(Extrait d'une Lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

Niels Nielsen

Professeur à Copenhague

... Soient

$$B_1\, B_2\, B_3 \dots B_r \dots$$

les nombres de Bernoulli, nous définissons, pour $n \geqq 2$, les fonctions $\varphi_n(x)$ de Bernoulli comme suit:

$$(1) \qquad \varphi_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{r=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{(2r)!\,(n-2r)!}\, x^{n-2r};$$

de plus, nous posons particulièrement

$$(2) \qquad \varphi_1(x) = x + \frac{1}{2}, \quad \varphi_0(x) = 1 .$$

De ces définitions nous trouvons immédiatement la formule suivante

$$(3) \qquad \varphi'_n(x) = \varphi_{n-1}(x);$$

de plus, il est bien connu que les fonctions $\varphi_n(x)$ satisfont à l'équation aux différences finies

$$(4) \qquad \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

et que cette équation, supplée avec la valeur de $\varphi_n(0)$ tirée des définitions susdites, détermine parfaitement les polynomes $\varphi_n(x)$.

Combinons encore les formules (1) et (4), nous aurons

$$(5) \qquad \varphi_n(x-1) = \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{r=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{(2r)!(n-2r)!} x^{n-2r};$$

c'est-à dire que nous obtenons l'expression de $\varphi_n(x-1)$ de celle de $\varphi_n(x)$ en y changeant simplement le signe du terme qui contient la puissance x^{n-1}.

Considérons ensuite cette autre équation aux différences finies

$$(6) \qquad f(x) - f(x-1) = \psi(x)$$

où $\psi(x)$ désigne un polynome entier de x, posons

$$\psi(x) = \frac{\alpha_0}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{\alpha_1}{(n-2)!} x^{n-2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-2}}{1!} x + \alpha_{n-1},$$

le polynome le plus général qui satisfait à l'équation (6) se présente sous la forme

$$(7) \qquad f(x) = \alpha_0 \varphi_n(x) + \alpha_1 \varphi_{n-1}(x) + \ldots + \alpha_{n-1} \varphi_1(x) + C,$$

où C désigne une constante arbitraire.

Cela posé, combinons les formules (3) et (7), nous aurons immédiatement la proposition suivante :

I. *Soit $f(x)$ un polynome quelconque qui satisfait à l'équation aux différences finies* (6), *le polynome le plus général qui satisfait à cette équation analogue*

$$(8) \qquad F(x) - F(x-1) = \psi'(x)$$

se présente sous la forme

$$(9) \qquad F(x) = f'(x) + C,$$

où C désigne une constante arbitraire.

Dans un Mémoire publié séparément Edouard Lucas a demontré une identité de la forme

$$(10) \qquad \varphi_{2n}(x) = \Phi_n(x^2 + x),$$

où $\Phi_n(x)$ désigne un polynome entier du degré n par rapport à x.

J'ignore comment Lucas a démontré la formule (10); mais une démonstration très simple peut être trouvée si nous remarquons que la fonction $\varphi_{2n}(p)$ est intimément liée avec la somme

$$1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \ldots + p^{2n-1}, \tag{11}$$

où n et p désignent deux positifs entiers. Appliquons ensuite des formules très élémentaires concernant les sommes (11) développées par MM. Stern et Lampe, nous retrouvons sans peine l'identité (10) de Lucas.

Cependant, nous trouvons une autre démonstration très simple et purement analytique si nous appliquons le lemme suivant:

II. *Soit $f(x)$ un polynome entier quelconque, il existe toujours un autre polynome entier $F(x)$, de sorte que*

$$\int (2x+1) f(x^2+x)\, dx = F(x^2+x) + C; \tag{12}$$

de plus, il existe encore un polynome entier $F_1(x)$ de sorte que

$$\int f(x^2+x)\, dx = (2x+1) F_1(x^2+x) + C. \tag{13}$$

En effet, différentions par rapport à x la formule (12), il en résulte

$$(2x+1) f(x^2+x) = (2x+1) F'(x^2+x);$$

c'est-à-dire qu'il faut admettre

$$F'(x) = f(x). \tag{14}$$

Quant à la formule (13), nous aurons de même

$$f(x^2+x) = 2 F_1(x^2+x) + (4x^2+4x+1) F'_1(x^2+x),$$

de sorte que nous avons à déterminer le polynôme entier $y = F_1(x)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$(4x+1) y' + 2y = f(x).$$

Or posons comme ordinairement $y = uv$, puis déterminons

les deux fonctions inconnues u et v, de sorte que

$$(4x+1)v' + 2v = 0\,, \quad (4x+1)vu' = f(x)\,,$$

nous aurons, pour le polynome cherché $F_1(x)$, cette expression

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \cdot \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{4x+1}}\,; \tag{15}$$

car la condition que $F_1(x)$ doit être un polynome entier n'est remplie que si nous faisons disparaître la constante d'intégration.

Intégrons maintenant par parties, nous aurons, en vertu de (15)

$$F_1(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s f^{(s)}(x)(4x+1)^s}{2^s . 1 . 3 . 5 \ldots (2s+1)}\,; \tag{16}$$

une autre expression explicite de $F_1(x)$ peut être obtenue à l'aide de la transformation

$$4x+1 = y^2\,,$$

ce qui donnera

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{2}\int f\left(\frac{y^2}{4} - \frac{1}{4}\right) dy\,,$$

d'où, en vertu de la série de TAYLOR

$$f\left(\frac{y^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{f^{(s)}\left(-\frac{1}{4}\right)}{2^{2s} . s\,!}\, y^{2s}\,,$$

pour notre polynome cherché, cette autre expression

$$F_1(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{f^{(s)}\left(-\frac{1}{4}\right)}{2^{2s+1} . s\,!\,(2s+1)}\,(4x+1)^s\,. \tag{17}$$

Or, ce lemme démontré, nous aurons, en vertu de la formule (3) combinée avec les valeurs initiales (2) des fonctions $\varphi_n(x)$, et en appliquant la conclusion ordinaire de n à $n+1$ ce théorème général :

III. *Les fonctions de* BERNOULLI *satisfont aux conditions sui-*

vantes

$$(18) \qquad \varphi_{2n}(x) = \Phi_n(x^2+x), \quad \varphi_{2n+1}(x) = (2x+1)\Psi_n(x^2+x),$$

où $\Phi_n(x)$ et $\Psi_n(x)$ sont deux polynomes entiers du degré n par rapport à x, unis par la relation

$$(19) \qquad \Psi_{n-1}(x) = \Phi'_n(x).$$

Voyez la démonstration complète et l'extension du théorème de LUCAS; cependant je n'ai pas réussi à donner une expression simple du polynome $\Phi_n(x)$.

Pour généraliser le théorème de LUCAS, je me suis proposé de déterminer tous les polynomes entiers

$$(20) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

qui satisfont à la condition

$$(21) \qquad f(x) = F(x^2+x)$$

$$(22) \qquad f(x) = (2x+1) F(x^2+x),$$

selon que n soit pair ou impair; $F(x)$ désigne un polynome entier de x.

Les résultats que je viens d'obtenir pour ces polynomes me semblent dignes de remarque, parce qu'ils sont des généralisations directes des résultats connus pour les polynomes de BERNOULLI.

Quant aux conditions susdites, remarquons tout d'abord qu'elles entraînent cette autre

$$(23) \qquad f(x) = (-1)^n f(-x-1),$$

et que cette dernière condition équivaut aux deux précédentes. Appliquons ensuite la série de TAYLOR, nous aurons

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s f^{n-s}(-1)}{(n-s)!} x^{n-s},$$

ce qui donnera, en vertu de (20), ces conditions suffisantes et

nécessaires

$$(24)\qquad a_p = \frac{(-1)^p}{(n-p)!}\, f^{(n-p)}(-1)\,, \quad 0 \leq p \leq n\,.$$

Or, il saute aux yeux que les équations (24) ne sont pas indépendantes entre elles et qu'elles sont du reste assez compliquées.

Etudions maintenant d'un autre point de vue la question qui nous occupe, nous aurons, en vertu de l'identité évidente

$$f(x) = f\left(-\frac{1}{2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\right),$$

cet autre développement en série de Taylor

$$(25)\qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{f^{(n-s)}\left(-\frac{1}{2}\right)}{(n-s)!} \left(x + \frac{1}{2}\right)^s,$$

puis appliquons l'autre identité évidente

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4},$$

nous aurons généralement, p étant un positif entier:

$$(26)\quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^{2p} = g_p(x^2 + x)\,, \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^{2p+1} = (2x+1)\,h_p(x^2 + x),$$

où $g_p(x)$ et $h_p(x)$ sont des polynomes entiers de x du degré p.

Cela posé, nous aurons le théorème suivant:

IV. *Un polynome entier quelconque $f(x)$ se présente sous la forme*

$$(27)\qquad f(x) = \Phi(x^2 + x) + (2x+1)\,\Psi(x^2 + x)\,,$$

ou $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ désignent deux polynomes entiers de x.

Combinons ensuite les deux formules (25) et (26), nous aurons immédiatement la proposition suivante:

V. *La condition suffisante et nécessaire pour que le polynome quelconque* (20) *satisfasse à une des deux conditions* (21) *ou* (22) *est*

$$(28)\qquad f^{(n-2p)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0\,, \quad 0 \leq p \leq \frac{n-1}{2}\,.$$

Cependant, ces conditions étant assez compliquées aussi, nous avons à appliquer les formules (6) et (7), ce qui nous donnera le théorème suivant:

VI. *La condition suffisante et nécessaire pour que $f(x)$ satisfasse à une des deux conditions* (21) *ou* (22) *est que le polynome $\psi(x)$ qui figure dans l'équation aux différences finies correspondante* (6) *est respectivement une fonction impaire ou paire de x.*

En effet, supposons que dans (6) $\psi(x)$ soit ou paire ou impaire, la formule correspondante (7) se présente sous cette forme

$$(29) \qquad f(x) = \alpha_0 \varphi_n(x) + \alpha_1 \varphi_{n-2}(x) + \alpha_2 \varphi_{n-4}(x) + \ldots ;$$

c'est-à-dire que la condition susdite est certainement suffisante.

Pour démontrer maintenant que notre condition est nécessaire aussi, nous changeons dans l'équation aux différences finies (6) le signe de x, ce qui donnera

$$(30) \qquad f(-x) - f(-x-1) = \psi(-x).$$

Supposons maintenant que $f(x)$ satisfasse à la condition (21), nous aurons en additionnant les deux formules (6) et (30)

$$\psi(x) + \psi(-x) = \big(f(x) - f(-x-1)\big) + \big(f(-x) - f(x-1)\big) = 0 ;$$

c'est-à-dire que $\psi(x)$ est dans ce cas une fonction impaire.

Supposons ensuite que $f(x)$ satisfasse à la condition (22), nous aurons en soustrayant les formules (6) et (30)

$$\psi(x) - \psi(-x) = \big(f(x) + f(-x-1)\big) - \big(f(-x) + f(x-1)\big) = 0 ;$$

c'est-à-dire que $\psi(x)$ est dans ce cas une fonction paire.

Cela posé, introduisons dans (29) les expresssions des fonctions de Bernoulli qui y figurent, nous aurons pour les coefficientes a_p figurant dans la définition (20) de $f(x)$ les expressions suivantes

$$(32) \qquad a_{2p+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_p}{(n-2p-1)!}, \quad \alpha_p = 2 \cdot (n-2p-1)!\, a_{2p+1}$$

$$(32) \qquad a_{2p} = \frac{1}{(n-2p)!} \left(\alpha_p + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{(-1)^{s-1}}{(2s)!} B_s \alpha_{p-s} \right) ;$$

dans (32) il faut admettre $p \geqq 1$; pour $p = 0$ nous aurons par-

ticulièrement

$$a_0 = \frac{a_0}{n!} = \frac{2}{n} a_1. \tag{33}$$

Eliminons ensuite entre les formules ainsi obtenues les coefficients a_p, il en résulte la formule générale

$$a_{2p} = \frac{2}{n-2p}\left(a_{2p+1} + \sum_{s=1}^{s=p}(-1)^{s-1}\binom{n-2p+2s-1}{2s} B_s a_{2p-2s+1}\right), \tag{34}$$

où il faut admettre

$$1 \leqq p \leqq \frac{n-1}{2}, \tag{35}$$

de sorte que nous venons de démontrer le théorème suivant:

VII. *Dans un polynome entier quelconque*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \tag{36}$$

qui satisfait à une des conditions (21) *ou* (22) *les coefficients à indice impair, savoir les* a_{2p+1}, *peuvent être choisis arbitrairement, tandis que les coefficients à indice pair, savoir les* a_{2p}, *se déterminent à l'aide des deux formules* (33) *et* (34); *dans le cas où* n *est un nombre pair, le dernier coefficient* a_n *peut être choisi arbitrairement aussi. Ces conditions sont à la fois suffisantes et nécessaires.*

Posons dans (36) pour abréger

$$\begin{cases} A_n(x) = a_0 x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \ldots \\ B_n(x) = a_1 x^{n-1} + a_3 x^{n-3} + a_5 x^{n-5} + \ldots \end{cases} \tag{37}$$

nous aurons

$$f(x) = A_n(x) + B_n(x), \tag{38}$$

et la fonction $B_n(x)$ détermine parfaitement le polynome $f(x)$, abstraction faite d'une constante additive, si n est supposé pair; c'est pourquoi nous désignons $B_n(x)$ comme la fonction déterminante du polynome $f(x)$.

Combinons maintenant les formules (29), (31) et (37), nous aurons, en vertu de (6) et l'expression suivante du polynome $\psi(x)$:

$$\psi(x) = 2\,B(x), \tag{39}$$

la proposition intéressante:

VIII. *Soit* $B_n(x)$ *la fonction déterminante d'un polynome qui satisfait à une des deux conditions* (21) *ou* (22), *nous aurons*

$$f(x) - f(x-1) = 2\,B_n(x)\,, \tag{40}$$

ou, ce qui est la même chose

$$f(x-1) = A_n(x) - B_n(x)\,. \tag{41}$$

Appliquons ensuite sur l'équation aux différences finies (40) le théorème I, nous aurons cette nouvelle proposition:

IX. *Supposons que les fonctions déterminantes* $B_n(x)$ *et* $B_{n-1}(x)$ *des deux polynomes* $f(x)$ *et* $g(x)$ *satisfassent à la condition*

$$B_{n-1}(x) = B'_n(x)\,; \tag{42}$$

nous aurons de même

$$g(x) = f'(x) + C_{n-1}\,, \tag{43}$$

où C_{2m} *est une constante arbitraire, tandis qu'il faut admettre* $C_{2m+1} = 0$.

Remarquons que l'hypothèse

$$B_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \tag{44}$$

nous donnera immédiatement

$$f(x) = \varphi_n(x) + C_n\,, \tag{45}$$

où C_n est à définir de la même manière que dans la formule (43), nous verrons que les deux derniers théorèmes sont des généralisations assez remarquables des formules (3) et (5) connues pour les fonctions de Bernoulli.

. . . .

Copenhague, le 8 juin 1910.

SUR LE LIEU DES POINTS DE CONTACT DOUBLE DES SURFACES DE DEUX SYSTÈMES LINÉAIRES

PAR

LUCIEN GODEAUX
à Liège

Il y a quelques années, M. CORRADINO MINEO s'est occuppé de la surface engendrée par les points paraboliques des surfaces d'un faisceau [1]. En cherchant à étendre ces recherches aux variétés algébriques à trois dimensions, je suis arrivé à la proposition suivante, qui ne me semble pas dépourvue d'intérêt.

On considère, sur une variété algébrique à trois dimensions, deux systèmes linéaires triplement infinis de surfaces algébriques; on construit les surfaces lieux des points où les surfaces d'un des systèmes et les surfaces d'un faisceau de l'autre, ont un contact double. Toutes les surfaces ainsi obtenus appartiennent à un même système linéaire, quel que soit l'ordre dans lequel on considère les systèmes donnés.

Comme application, on peut indiquer une construction du système quadricanonique d'une variété algébrique à trois dimensions.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions supposée dépourvue de singularités. Sur cette variété on donne deux systèmes de surfaces $|F_1|$, $|F_2|$, linéaires, triplement infinis et réguliers (sans points-base). Nous supposerons généralement que les deux systèmes donnés $|F_1|$, $|F_2|$ sont indépendants; cependant, dans certains cas, nous supposerons que l'un des

---

[1] *Sul luogo dei punti parabolici delle superficie d'un fascio.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1906, vol. XXI, pp. 211-217.

systèmes, $|F_1|$, appartient à l'involution linéaire ∞^3 déterminée par $|F_2|$.

Fixons l'attention sur une surface $\overline{F}_1$ du premier système. Les surfaces F_2 déterminent sur $\overline{F}_1$ un système linéaire ∞^3 de courbes $(\overline{F}_1 F_2)$, et parmi ces courbes, il y en a ∞^1 qui possèdent un point de rebroussement. Les surfaces F_2 qui découpent sur la surface $\overline{F}_1$ des courbes ayant une telle singularité ont un contact double avec cette surface au point de rebroussement. Le lieu de ces points de rebroussement est une certaine courbe $(\overline{F}_1 F_2)_r$. On sait que l'on a, par un théorème établi à la fois par M.M. PANNELLI [1] et BONNESSEN [2],

$$(1) \qquad (\overline{F}_1 F_2)_r \equiv 4\,(\overline{F}_1 F'_1) + 8\,(\overline{F}_1 F_2)\,,$$

$|F'_1|$ désignant le système adjoint au système $|F_1|$.

Lorsque la surface $\overline{F}_1$ décrit un faisceau $|\overline{F}_1|$ (du système $|F_1|$), le lieu de la courbe $(\overline{F}_1 F_2)_r$ est une certaine surface Ψ_1 passant un certain nombre x de fois par la courbe $(\overline{F}_1 \overline{F}_1)$, base du faisceau $|\overline{F}_1|$ considéré. On a ainsi

$$(\overline{F}_1 \Psi_1) \equiv (\overline{F}_1 F_2)_r + x\,(\overline{F}_1 \overline{F}_1)\,,$$

ou, par la relation (1),

$$(\overline{F}_1 \Psi_1) \equiv 4\,(\overline{F}_1 F'_1) + x\,(\overline{F}_1 \overline{F}_1) + 8\,(\overline{F}_1 F_2)\,.$$

Par un théorème classique de M. SEVERI [3], on en déduit

$$(2) \qquad \Psi_1 \equiv 4\,F'_1 + x\,F_1 + 8\,F_2\,.$$

Cherchons à déterminer la quantité x. Cette quantité peut dépendre de caractères de la variété V et des caractères des systèmes linéaires $|F_1|$, $|F_2|$.

---

(1) *Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve tracciati sopra una superficie algebrica.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1905, vol. XX, pp. 34-48.

(2) *Sur les séries linéaires triplement infinies de courbes algébriques sur une surface algébrique.* Oversigt over det kgl. Danske Videns kabernes selskabs Forhandlinger, 1906, pp. 281-293.

(3) *Osservazioni varie di Geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà.* Atti del R. Istituto Veneto, 1905-1906, t. LXV, pp. 625-643.

Supposons en premier lieu que le système $|F_1|$ appartient à l'involution déterminée par le système $|F_2|$. Soient n_1, n_2 les degrés des systèmes $|F_1|$, $|F_2|$; dans le cas actuel, on a $n_1 = \lambda n_2$.

Aux surfaces F_2 du système $|F_2|$, faisons correspondre par une homographie les plans F_2^* d'un espace linéaire à trois dimensions V^*; la variété V sera ainsi représentée par l'espace $n_2^{\text{uple}}\, V^*$. Aux surfaces F_1 (et en particulier $\bar{F}_1$) correspondront des surfaces F_1^* (ou $\bar{F}_1^*$) formant un système linéaire $|F_1^*|$ (ou un faisceau $|\bar{F}_1^*|$). A la surface Ψ_1 correspondra la surface Ψ_1^* lieu des points paraboliques des surfaces du faisceau $|\bar{F}_1^*|$. Une surface F_1^* est d'ordre λ, donc la surface Ψ_1^* est d'ordre $8(\lambda - 1)$ (¹).

Représentons par $[x\,y\,z]$ le nombre de points communs à trois surfaces x, y, z. La formule (2) donne

$$[\Psi_1^*\, F_2^*\, F_2^*] = 4\,[F'_1{}^*, F_2^*, F_2^*] + x\,[F_1^*, F_2^*, F_2^*] \\ + 8\,[F_2^*, F_2^*, F_2^*].$$

Par suite, comme la surface adjointe à F_1^* est d'ordre $\lambda - 4$, on a

$$8(\lambda - 1) = 4(\lambda - 4) + \lambda x + 8,$$

d'où $x = 4$.

Nous parvenons donc à ce résultat que si l'on fait $n_1 = \lambda n_2$ dans

$$x = x(n_1, n_2, P_a, P_g, \ldots),$$

cette fonction se réduit à 4, quelles que soient les quantités (entières) qui y entrent. On en déduit aisément que cette fonction est constante et égale à quatre. La relation (2) devient ainsi, que les systèmes $|F_1|$, $|F_2|$ soient indépendants ou non,

$$\Psi_1 \equiv 4\,F'_1 + 4\,F_1 + 8\,F_2, \tag{3}$$

ou, en désignant par $|L|$ le système canonique de V,

$$\Psi_1 \equiv 4\,L + 8\,F_1 + 8\,F_2. \tag{4}$$

Soit Ψ_2 la surface obtenue en renversant les rôles des systèmes $|F_1|$, $|F_2|$. La relation (4) donne

$$\Psi_1 \equiv \Psi_2. \tag{5}$$

(¹) Mineo, loc. cit.

On étendra les égalités (3), (4) et (5) aux cas de systèmes linéaires pourvus de points-base en effectuant des transformations birationnelles convenables de la variété V.

Théorème. — *Si sur une variété à trois dimensions,* V, *on considère deux systèmes linéaires triplement infinis de surfaces algébriques, les surfaces lieux des points de contact doubles des surfaces d'un système avec les surfaces d'un faisceau de l'autre système, forment un même système linéaire, quelque soit l'ordre dans lequel on opère sur les systèmes donnés.*

2. Considérons actuellement sur la variété V un système linéaire quintuplement infini au moins de surfaces $|F|$. Dans ce système choisissons un faisceau $|\overline{F}|$ et un système triplement infini $|\overline{\overline{F}}|$ n'ayant aucune surface en commun. Designons par Φ le lieu des points où des surfaces $\overline{F}$, $\overline{\overline{F}}$ ont des contacts doubles. D'après ce que nous venons de voir, nous avons

$$\Phi \equiv 4\,\overline{F}' + 4\,\overline{F} + 8\,\overline{\overline{F}},$$

c'est-à-dire,

$$\Phi \equiv 4\,F' + 12\,F.$$

De cette formule on déduit

$$|\Phi - 16\,F| = |4\,L|. \tag{6}$$

Théorème. — *Si l'on donne sur une variété à trois dimensions un système linéaire de surfaces* ∞^5 *ou moins, le système obtenu en sommant le système quadricanonique et seize fois le système donné, contient les surfaces lieu des points en lesquels une surface d'un faisceau et une surface d'un système* ∞^3 *choisis dans le système donné ont un contact double.*

3. Désignons par p_a, p, n, ω respectivement le genre arithmétique, le genre de la courbe commune à deux surfaces, le degré et l'invariant de Castelnuovo et Enriques du système $|F|$. Soient r_a, r, ν le genre arithmétique, le genre et le degré du système $|\Phi|$.

La formule (6) permet d'écrire

$$r_a = [\Phi] = [4\,L] + [16\,F] + [4\,L,\,16\,F],\ (^1)$$

---

(1) Nous représentons respectivement par $[x]$, $[x, y]$, $[x, y, z]$ le genre

d'où l'on déduit par un calcul simple

$$r_a = 4(\Omega_2 + \Omega_1 + \Omega_0) + 4^2 p_a + 4^2.77.p - 4^2.95\,n - 2.4^2.\omega - 11 \times 65.$$

De là

Théorème. — *L'expression*

$$\frac{1}{16} r_a - p_a - 77\,p + 95\,n + 2\,\omega$$

est un invariant relatif de la variété V.

De (6), on déduit

$$r = [\Phi^2] = [(4\,L)^2] + [(16\,F)^2] + 2\,[4\,L, 16\,F]$$
$$+ 2.4^4\,[L^2, F] + 2.4^5\,[F, F^2] - 3\,.$$

Par le calcul, on arrive alors à l'équation

$$r = 4^2\,\Omega_1 + 4^2.6\,\Omega_0 + 4^4.18\,p - 4^5.5\,n + 4^3.7\omega - 3881\,,$$

et l'on en déduit:

Théorème. — *L'expression*

$$\frac{1}{64} r - 72p + 80\,n - 7\,\omega$$

est un invariant relatif de la variété V.

De la relation (6), on tire encore

$$\nu = [\Phi]^3 = 4^3\,[L^3] + 3.4^4\,[L^2\,F] + 3.4^5\,[L\,F^2] + 4^6\,[F^3]\,,$$

et ensuite

$$\nu = 4^3\,\Omega_0 + 3.4^4\,\omega + 3.4^5\,p + 4^4\,n - 3.5.4^4\,,$$

et enfin:

Théorème. — *L'expression*

$$\frac{1}{256}\,\nu - 3\,\omega - 12\,p - n$$

est un invariant relatif de la variété V.

Liège, 10 juin 1910.

---

arithmétique d'une surface x, le genre de la courbe d'intersection de deux surfaces x, y, et enfin le nombre de points communs aux trois surfaces x, y, z.

ÉSSAI D'UNE THÉORIE ANALYTIQUE DES LIGNES NON-EUCLIDIENNES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI
à Rome

(*Suite*)

§ 90

Applications. — A l'aide de la représentation que l'on vient d'étudier, une foule de questions concernant les lignes non-euclidiennes peuvent être ramenées à d'autres questions sur les lignes planes ordinaires. Voici quelques exemples :

1° S'il s'agit de construire, sur un plan non-euclidien, un double système de cercles orthogonaux, après d'avoir résolu ce problème sur le plan euclidien, on fait la représentation de la figure sur le plan non-euclidien, à l'aide des équations (1) ou (1').

2° La figure formée par un cercle, une transversale OAB et une tangente OC issues du même point O, a pour image une figure de même nature.

En appelant O_1, A_1, B_1, C_1 les images des points O, A, B, C, on a les relations (§ 86)

$$O_1A_1 = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,OA\,,\quad O_1B_1 = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,OB\,,\quad O_1C_1 = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,OC\,.$$

En remarquant que $O_1A_1 \cdot O_1B_1 = \overline{O_1C_1}^2$, on obtient d'ici par multiplication

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,OA \cdot \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,OB = \mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}\,OC\,. \tag{19}$$

En faisant tourner la transversale OAB autour du point fixe O, le produit $\operatorname{tg}\frac{1}{2}OA \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}OB$ garde évidemment une valeur constante que l'on peut appeler la *puissance du point* O *par rapport au cercle.*

Dans le plan lobatschewskien l'égalité (19) est remplacée par l'autre

$$\text{(19')} \qquad \operatorname{th}\frac{1}{2}OA \cdot \operatorname{th}\frac{1}{2}OB = \operatorname{th}^2\frac{1}{2}OC\,,$$

d'où l'on peut tirer des conséquences analogues.

3° Si sur les droites r, r' issues du point O on prend les segments (OA, OB), (OA′, OB′):

A) La condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points A, B, A′, B′ soient sur même cercle, est exprimée par l'équation

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}OA \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}OB = \operatorname{tg}\frac{1}{2}OA' \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}OB' \quad \text{(dans le p. r.)}$$

$$\operatorname{th}\frac{1}{2}OA \cdot \operatorname{th}\frac{1}{2}OB = \operatorname{th}\frac{1}{2}OA' \cdot \operatorname{th}\frac{1}{2}OB' \quad \text{(dans le p. l.).}$$

B) La condition nécessaire et suffisante pour que le cercle circonscrit au triangle ABA′ touche la droite r' au point A′, est exprimée par l'equation

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}OA \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}OB = \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}OA' \quad \text{(dans le p. r.)}$$

$$\operatorname{th}\frac{1}{2}OA \cdot \operatorname{th}\frac{1}{2}OB = \operatorname{th}^2\frac{1}{2}OA' \quad \text{(dans le p. l.).}$$

Arrivés à ce point, on peut donner la notion d'*axe radical* d'une couple de cercles, en le définissant soit comme la corde commune à deux cercles décrits sur même plan, soit comme le lieu des points d'égale puissance par rapport à ces cercles.

On peut ensuite étendre aux plans non-euclidiens la théorie complète des axes radicaux et des centres radicaux, conformément à ce que l'on fait dans la géométrie ordinaire, etc.

4° Supposons d'avoir une figure plane non-euclidienne, formée d'une façon arbitraire par d'arcs de cercle passant par même point P. Si l'on en fait la représentation sur le plan euclidien à l'aide des formules du § 86, on obtient une figure euclidienne

formée elle-même par d'arcs de cercles passant par même points P_1. La dépendence mutuelle de ces figures permet de déduire les propriétés de l'une, de celles de l'autre. Voici quelques exemples :

La somme des angles intérieurs du polygône curviligne non-euclidien, formé par n cercles passant par même point, est égale à $2(n-2)$ angles droits.

Dans un triangle curviligne non-euclidien, formé par trois cercles passant par même point P, les cercles joignant ce point aux sommets, et vérifiant l'ultérieure condition de partager les angles en deux parties égales, ou bien d'être orthogonaux aux côtés opposés, passent par même point...... etc.

5° Sur le plan euclidien la développante de cercle de rayon $\frac{a}{2}$ est représentée (en coordonnées radiales) par l'équation

$$(20) \qquad R_1 = \sqrt{as_1 + \frac{a^2}{4}}.$$

En vertu de cette formule, l'équation (3) donne par intégration

$$s = \frac{4}{a} \log\left(as_1 + \frac{a^2}{4} + 4\right).$$

En éliminant s_1 entre cette équation et l'autre

$$R = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{R_1}{2}\right) = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{as_1 + \frac{a^2}{4}}}{2}\right)$$

que l'on déduit des relations (1), on trouve

$$(21) \qquad R = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{e^{\frac{as}{4}} - 4}\right).$$

Telle est l'équation (en coordonnées radiales) de la ligne plane riemannienne ayant pour image la développante de cercle (20).

Or cette développante est une trajectoire orthogonale des tangentes t_1 d'un certain cercle C_1 ; et comme les droites t_1 sont les images d'un système de cercles t passant par le pôle, et le cercle C_1 est l'image d'un autre cercle C, on conclut que : *La ligne plane riemannienne représentée (en coordonnées radiales) par*

l'équation (21), *est une trajectoire orthogonale de la suite de cercles passant par le pôle et tangents à un cercle fixe.*

Sur le plan lobatschewskien on a une propriété analogue.

§ 91

Inversion sur les plans non-euclidiens. — Soient L, Λ deux lignes planes non-euclidiennes ayant pour image les lignes L_1, Λ_1 inverses par rapport au pôle et à un cercle fondamental de rayon a.

Si l'on désigne par (R, s), (ρ, σ), (R_1, s_1), (ρ_1, σ_1) le rayon vecteur et l'arc des lignes L, Λ, L_1, Λ_1, on a par l'application des relations (1), (2):

$$R_1 = 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{R}{2}\right), \quad \rho_1 = 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\rho}{2}\right) \tag{22}$$

$$ds_1 = \frac{ds}{\cos^2\left(\frac{R}{2}\right)}, \quad d\sigma_1 = -\frac{ds}{\cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right)}. \tag{23}$$

En remarquant que $R_1 \rho_1 = a^2$, les équations (22) multipliées membre à membre donnent

$$\mathrm{tg}\left(\frac{R}{2}\right)\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \frac{a^2}{4}. \tag{24}$$

Combinons les équations (23) par division, en rappelant en outre les relations

$$\frac{d\sigma_1}{ds_1} = \frac{a^2}{R_1^2}, \quad \frac{ds_1}{d\sigma_1} = \frac{a^2}{\rho_1^2},$$

qui ont lieu entre les arcs élémentaires de deux lignes euclidiennes inverses, telles que L_1, Λ_1.

On obtient ainsi les équations

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{a^2}{R_1^2}\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{R}{2}\right)}, \quad \frac{ds}{d\sigma} = \frac{a^2}{\rho_1^2}\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{R}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right)}. \tag{25}$$

En tenant compte des formules (22) et des autres

$$\cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = \frac{16\sin^2\left(\frac{R}{2}\right)}{16\sin^2\left(\frac{R}{2}\right) + a^4\cos^2\left(\frac{R}{2}\right)},$$

$$\cos^2\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{16\sin^2\left(\frac{\rho}{2}\right)}{16\sin^2\left(\frac{\rho}{2}\right) + a^4\cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right)}$$

aisémant dérivables de la relation (24), les équations (25) donnent par intégration

$$(26) \quad \begin{cases} \sigma = 4\,a^2 \displaystyle\int \frac{ds}{16\sin^2\left(\frac{R}{2}\right) + a^4\cos^2\left(\frac{R}{2}\right)} + m\,, \\ s = 4\,a^2 \displaystyle\int \frac{d\sigma}{16\sin^2\left(\frac{\rho}{2}\right) + a^4\cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right)} + n\,, \end{cases}$$

m et n étant des constantes arbitraires.

Dans le plan lobatschewskien, les équations (24), (26) sont remplacées par les autres

$$(24') \quad \operatorname{th}\left(\frac{R}{2}\right).\operatorname{th}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$$

$$(26') \quad \begin{cases} \sigma = 4\,a^2 \displaystyle\int \frac{ds}{16\operatorname{sh}^2\left(\frac{R}{2}\right) + a^4\operatorname{ch}^2\left(\frac{R}{2}\right)} + m\,, \\ s = 4\,a^2 \displaystyle\int \frac{d\sigma}{16\operatorname{sh}^2\left(\frac{\rho}{2}\right) + a^4\operatorname{ch}^2\left(\frac{\rho}{2}\right)} + n\,. \end{cases}$$

Quand on connait une des lignes L, Λ, l'autre peut être aussitôt déterminée à l'aide des relations (24) et (26), (24′) et (26′).

En effet si la ligne $\left\{\begin{matrix} L \\ \Lambda \end{matrix}\right\}$ est définie par une équation en coordonnées radiales, le rayon vecteur $\left\{\begin{matrix} R \\ \rho \end{matrix}\right\}$ est une fonction connue

de l'arc $\left\{ \begin{matrix} s \\ \sigma \end{matrix} \right\}$; de sorte que la ligne $\left\{ \begin{matrix} \Lambda \\ L \end{matrix} \right\}$ est représentée, en coordonnées radiales, par l'équation résultant de l'élimination de $\left\{ \begin{matrix} s \\ \sigma \end{matrix} \right\}$ entre l'équation (24), ou (24′), et la $\left\{ \begin{matrix} \text{première} \\ \text{deuxième} \end{matrix} \right\}$ équation (26), ou (26′).

§ 92

La transformation que l'on vient de considérer s'appelle *inversion,* vu l'analogie qu'elle présente avec l'ordinaire inversion du plan euclidien. Ses caractères essentiels sont la conservation des angles et la transformation des cercles en cercles.

Ces faits s'expliquent par la simple remarque que l'inversion est le produit:

1° de la transformation étudiée au § 86

2° d'une transformation par rayon vecteur réciproque

3° de la transformation inverse à la première,

transformations, celles-ci, qui jouissent précisément des deux propriétés dont on vient de parler.

L'inversion ne présente aucune particularité dans le plan riemannien, la relation (24) pouvant être toujours vérifiée, quelle que soit la valeur de la constante a.

Dans le cas du plan lobatschewskien au contraire, les facteurs composant le premier membre de la relation (24′) ont leur champ de variabilité limité entre -1 et $+1$. Or comme le *maximum* du facteur $\left\{ \begin{matrix} \text{th}\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ \text{th}\left(\frac{R}{2}\right) \end{matrix} \right\}$ est 1, le *minimum* de l'autre facteur $\left\{ \begin{matrix} \text{th}\left(\frac{R}{2}\right) \\ \text{th}\left(\frac{\rho}{2}\right) \end{matrix} \right\}$ est $\frac{a^2}{4}$, de sorte que *pour que la condition* (24′) *puisse être vérifiée, il doit être* $a \leqq 2$; *et cette condition remplie, les deux quantités* $\text{th}\left(\frac{1}{2}\rho\right)$, $\text{th}\left(\frac{1}{2}R\right)$ *ne peuvent osciller (en valeur absolue) qu'entre le minimum* $\frac{a^2}{4}$ *et le maximum* 1.

Or comme la limitation

$$\frac{a^2}{4} \leqq \text{th}\left(\frac{R}{2}\right) \leqq 1$$

entraine l'autre

$$2 \text{ Secteur th} \left(\frac{a^2}{4}\right) \leq \frac{R}{2} \leq \infty ,$$

on conclut que chacun des vecteurs R, ρ, en partant d'un minimum correspondant à la valeur $\frac{a^2}{4}$ de la respective tangente hyperbolique, peut croître jusqu'à l'infini.

Conséquemment si l'on décrit sur le plan lobatschewskien le cercle C ayant le centre au pôle et dont le rayon R_0 est défini par la relation

$$\text{th}\left(\frac{R_0}{2}\right) = \frac{a^2}{4} ,$$

la correspondance entre les points du plan que nous venons d'appeler *inversion,* peut avoir lieu seulement pour les points qui sont à l'extérieur de ce cercle ou sur le contour.

En supposant $\rho = R$, la relation (24') revient à l'autre

$$\text{th}\left(\frac{R}{2}\right) = \text{th}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \frac{a}{2} ,$$

ce que démontre que: *Le lieu des points-unis dans l'inversion est un cercle* C' *ayant le centre au pôle, et dont le rayon* r_0 *est défini par l'équation*

$$\text{th}\left(\frac{r_0}{2}\right) = \frac{a}{2} .$$

Or les deux cercles concentriques C, C' partagent le plan lobatschewskien en trois régions P, Q, R, dont la première est à l'intérieur de C, la deuxième entre C et C', et la troisième à l'extérieur de C'.

A un point de la région Q correspond un point de la region R, et réciproquement; un point de C' correspond à lui-même; un point de C a son correspondant à l'infini; un point de la region P a pour correspondant un point idéal du plan.

Bien que l'inversion sur les plans non-euclidiens présente une étroite analogie avec l'inversion sur le plan ordinaire, les deux théories offrent néanmoins plusieurs divergences. Ainsi, par exemple, la propriété que dans l'inversion ordinaire à un cercle passant par le pòle correspond une droite, ne subsiste nullement dans l'inversion non-euclidienne.

En effet si L est un cercle non-euclidien passant au pôle, son

image euclidienne L_1 est aussi un cercle passant au pôle, et conséquemment la ligne euclidienne Λ_1, inverse de L_1 est une droite ne contenant pas le pôle. La ligne Λ est donc:

1° sur le plan riemannien un cercle passant par le point opposé au pôle;

2° sur le plan lobatschewskien un cercle dont le rayon r et la distance a du centre au pôle sont liés par la relation $\operatorname{ch} r + \operatorname{ch} a = 0$.

§ 93

On sait qu'en deux lignes euclidiennes inverses, la sous-tangente polaire de l'une et la sous-normale polaire de l'autre sont les facteurs d'un produit constant. — Allons voir si cette propriété se conserve sur les plans non-euclidiens.

Si (S_t, S_n) et (S'_t, S'_n) désignent la sous-tangente et la sous-normale polaires des lignes inverses L et Λ, on a (§ 34)

$$\operatorname{tg} S_t = \frac{\sin^2 R}{\frac{dR}{d\omega}}, \quad \operatorname{tg} S'_n = \frac{d\rho}{d\omega},$$

d'où il suit par multiplication

$$\operatorname{tg} S_t . \operatorname{tg} S'_n = \sin^2 R . \frac{d\rho}{dR}. \tag{27}$$

En dérivant l'équation (24) après de l'avoir résolue par rapport à $\operatorname{tg}\left(\frac{\rho}{2}\right)$, on obtient

$$\frac{d\rho}{dR} = -\frac{a^2}{4} . \frac{1+\cos\rho}{1-\cos R},$$

et ensuite

$$\sin^2 R \cdot \frac{d\rho}{dR} = -\frac{a^2}{4}(1+\cos R)(1+\cos\rho). \tag{28}$$

En multipliant enfin les relations

$$\operatorname{tg}\left(\frac{R}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos R}{1+\cos R}}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\rho}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\rho}{1+\cos\rho}},$$

et en tenant compte de la formule (24), on trouve

$$\frac{a^2}{4} = \frac{\sin R . \sin\rho}{(1+\cos R)(1+\cos\rho)}. \tag{29}$$

L'élimination de $\sin^2 R \frac{d\rho}{dR}$ et $(1 + \cos R)(1 + \cos \rho)$ entre les équations (27), (28), (29) donne

$$(30) \qquad \operatorname{tg} S_t \, . \operatorname{tg} S'_n = \sin R \, . \sin \rho \, .$$

Telle est la relation qui, dans le plan riemannien, remplace la relation

$$S_t \, . \, S'_n = \text{constante}$$

valable pour deux lignes inverses du plan ordinaire.

De l'équation (30) et de son analogue.

$$\operatorname{tg} S'_t \, . \operatorname{tg} S_n = \sin \rho \, . \sin R \, ,$$

on déduit la proportion

$$\frac{\operatorname{tg} S_t}{\operatorname{tg} S_n} = \frac{\operatorname{tg} S'_t}{\operatorname{tg} S'_n} \, ,$$

de sorte que si l'on fait une recherche analogue sur le plan lobatschewskien, on a le théorème:

En deux lignes $\left\{\begin{array}{l}\textit{riemanniennes}\\ \textit{lobatschewskiennes}\end{array}\right\}$ *inverses, le rapport de la tangente* $\left\{\begin{array}{l}\textit{circulaire}\\ \textit{hyperbolique}\end{array}\right\}$ *de la sous-tangente polaire à la tangente* $\left\{\begin{array}{l}\textit{circulaire}\\ \textit{hyperbolique}\end{array}\right\}$ *de la sous-normale polaire, a même valeur dans les deux lignes.*

§ 94

Lignes planes illuminées par des rayons issus d'un point fixe. — Si l'on a une source lumineuse concentrée a un point O de l'espace ordinaire, on sait que son intensité à un autre point libre P de l'espace est inversement proportionnelle au carré du rayon vecteur OP issu du point lumineux.

Si le point P appartient à une surface ou à une ligne décrite sur un plan contenant le point lumineux, l'intensité lumineuse en ce point P est inversement proportionnelle au carré du rayon vecteur OP et directement proportionnelle au cosinus de l'angle que le vecteur fait avec la normale à la surface ou à la ligne au point considéré P.

Dans les espaces non-euclidiens tout est inconnu à ce re-

gard, car quand même on eût la certitude absolue de leur existence physique, nous seraient toutefois inconnues les lois naturelles que les phénomènes suivent dans leur manifestation.

D'ici la nécessité de procéder par analogie, ou de tâtonner dans le terrain douteux et souvent arbitraire des hypothèses.

Mais, en laissant de côtés toute disquisition métaphysique, si l'on admet seulement (ce qui ne paraît pas une prétension excessive) que certaines énergies physiques, telles que la lumière, la chaleur, etc. obéissent à la loi de la propagation rectiligne, même dans les espaces non-euclidiens, la recherche de la loi avec laquelle leur intensité varie avec la distance, est peut-être possible par de simples considérations géométriques.

Si l'on se demande pourquoi l'intensité des agents physiques considérés est, dans notre espace, inversement proportionnelle au carré des distances, on verra que cela est la conséquence nécessaire d'une loi géométrique: la loi de la proportionnalité entre la surface de la sphère et le carré de son rayon. L'energie, irradiant du centre d'activité, se répand autour de ce point sur des couches sphériques concentriques, dont les rayons augmentent continuellement et indéfiniment. L'intensité est donc inversement proportionnelle à la surface de ces sphères, ou (ce qui revient au même) inversement proportionnelle au carré des distances.

Dans les espaces non-euclidiens il a lieu sans doute quelque chose d'analogue, mais comme la surface d'une sphère non-euclidienne est proportionnelle au carré de sinus circulaire ou hyperbolique du rayon, suivant que l'espace et riemannien ou lobatschewskien (Voir la deuxième partie) on est naturellement amené à cette loi: *L'intensité des agents physiques que l'on vient de considérer, a un point quelconque libre de l'espace* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{riemannien} \\ \textit{lobatschewskien} \end{array} \right\}$ *est inversement proportionnelle au carré du sinus* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{circulaire} \\ \textit{hyperbolique} \end{array} \right\}$ *des distances.*

Quant à la variation de l'intensité, dépendamment de l'inclinaison du rayon incident sur la surface ou la ligne, *il est raisonnable d'admettre que cette variation obéisse à même loi que dans l'espace euclidien.*

Fig. 38

Soient en effet L une ligne plane euclidienne, t la tangente à un point quelconque A, O et O' deux points du plan tels

qu'il soit $OA = O'A = R$, OP et $O'P'$ les perpendiculaires abaissées des points O, O' sur la tangente t, θ et θ' les angles $O\hat{A}P$ et $O'\hat{A}P'$.

En supposant que la source lumineuse soit placée successivement en O et O', les intensités lumineuses I et I' au point A ont pour expressions

$$I = a \cdot \frac{\sin\theta}{R^2}, \quad I' = a \cdot \frac{\sin\theta'}{R'^2},$$

où a est une constante qui dépend seulement de la nature de l'espace où a lieu le phénomène. — On déduit de ces formules,

$$\frac{I}{\sin\theta} = \frac{I'}{\sin\theta'}$$

et conséquemment

$$\frac{I}{OP} = \frac{I'}{O'P'}. \tag{31}$$

Or la loi exprimée par cette relation ne contient nullement les inclinaisons θ, θ'; nous avons donc réussi à nous dégager, pour ainsi dire, d'un tel élément; de sorte que si l'on suppose que la figure précédente se rapporte à même problème dans un espace non-euclidien, la proportion (31) doit naturellement être remplacée par une des autres

$$\frac{I}{\sin OP} = \frac{I'}{\sin O'P'}, \quad \frac{I}{\mathrm{sh}\, OP} = \frac{I'}{\mathrm{sh}\, O'P'}.$$

Or comme $OA = O'A$, on déduit des triangles rectangles OPA, $O'P'A'$

$$\frac{\sin OP}{\sin\theta} = \frac{\sin O'P'}{\sin\theta'}, \quad \frac{\mathrm{sh}\, OP}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{sh}\, O'P'}{\mathrm{sh}\,\theta'},$$

ce qui reduit les relations ci-dessus à la forme unique

$$\frac{I}{\sin\theta} = \frac{I'}{\sin\theta'}.$$

Pour completer donc la loi que l'on vient d'énoncer on peut joindre: *Si le point frappé appartient à une surface ou à une ligne tracée sur un plan contenant le centre lumineux, l'intensité*

lumineuse en ce point est inversement proportionnelle au carré du sinus (circulaire ou hyperbolique) du rayon vecteur, et directement proportionnelle au cosinus de l'angle que ce vecteur forme avec la normale à la surface ou à la ligne au point considéré.

§ 95

Les formules exprimant l'intensité de la lumière (ou de la chaleur) à un point quelconque d'une ligne non-euclidienne, quand la source lumineuse (ou calorifique) est concentrée au pôle, ont la forme que voici

$$\text{(32)} \qquad I = \frac{a \cdot \sin\theta}{\sin^2 R}$$

$$\text{(32')} \qquad I = \frac{a \cdot \sin\theta}{\text{sh}^2 R},$$

a désignant une constante, et θ l'inclinaison du rayon vecteur R sur la ligne.

Ces relations peuvent être employées pour déterminer la ligne plane, à chaque point de laquelle l'intensité lumineuse est exprimée par une fonction connue de quelques éléments géométriques de la ligne.

Exemples. — 1° *Trouver la ligne plane d'intensité lumineuse constante* ($=k$), *le point lumineux étant au pôle.*

En rappelant que $\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}$, l'equation (32) revient à l'autre

$$\frac{a \cdot dR}{\sqrt{a^2 - k^2 \sin^4 R}} = ds,$$

d'où il suit par intégration

$$\text{(33)} \qquad a \int \frac{dR}{\sqrt{a^2 - k^2 \sin^4 R}} = s + s_0,$$

s_0 étant une constante arbitraire.

Telle est l'équation de la ligne riemannienne cherchée.

Dans le plan lobatschewskien on a une équation analogue.

2° *Trouver la ligne riemannienne le long de laquelle l'intensité lumineuse est inversement proportionnelle au sinus de la distance au point lumineux.*

La condition actuelle

$$\mathrm{I} = \frac{k}{\sin \mathrm{R}},$$

où k est une constante, comparée à la relation générale (32), donne

$$\frac{a \,.\, d\mathrm{R}}{\sqrt{a^2 - k^2 \sin^2 \mathrm{R}}} = ds,$$

d'où il suit par intégration

$$a \int \frac{d\mathrm{R}}{\sqrt{a^2 - k^2 \sin^2 \mathrm{R}}} = s + s_0,$$

Le problème est ainsi ramené aux quadratures.

Sur le plan lobatschewskien on peut faire une recherche analogue.

3° Si l'on demande de *construire une ligne plane le long de laquelle l'intensité lumineuse est exprimée par la relation*

$$\mathrm{I} = \frac{k \sin^2 \mathrm{R}}{\sin \theta}, \tag{34}$$

probablement on répondra au premier abord que le problème n'est pas possible, la loi (34) paraissant être absolument en opposition avec la loi naturelle (32).

Mais si l'on compare les formules (33), (34), on tombe sur l'équation différentielle

$$\sqrt{a} \cdot \frac{d\mathrm{R}}{\sqrt{a - k \sin^4 \mathrm{R}}} = ds,$$

donnant par intégration

$$\sqrt{a} \int \frac{d\mathrm{R}}{\sqrt{a - k \sin^4 \mathrm{R}}} = s + s_0. \tag{35}$$

Cette quadrature effectuée, on a une relation finie entre les coordonnées radiales (R, s), ce qui définit une ligne. On voit donc que, malgré la contradiction apparente entre la loi (34) et la loi ordinaire de la nature, il y a réellement une ligne le long de laquelle l'intensité lumineuse est exprimable par telle formule.

Les équations (33), (35) sont du même type; en les identi-

fiant, on arrive à cette conclusion curieuse et inattendue: *La ligne* (35), *qui paraît être réfractaire à la loi naturelle de l'optique, se réduirait à une ligne à intensité lumineuse constante, s'il était possible de remplacer le facteur de proportionnalité* a, *paraissant dans la loi générale* (32), *par l'autre facteur* $\sqrt{a}$, *à la suite d'une hypothétique et convenable modification des conditions physiques et optiques du milieu.*

§ 96

Caustiques par réflexion et par réfraction. — Les rayons lumineux issus d'un point fixe, après avoir subi la réflexion ou la réfraction aux points successifs d'une ligne plane matérielle dévient de leur direction initiale et enveloppent deux lignes appelées respectivement *caustique par réflexion* et *caustique par réfraction.*

Pour déterminer ces lignes, il faudrait connaître les lois de la réflexion et de la réfraction dans les espaces non-euclidiens.— Quant à la première question, on peut se tirer d'affaire en remarquant que la loi de la réflexion ordinaire, consistant dans l'égalité de l'angle d'incidence à l'angle de réflexion, découle au fond de cette propriété géométrique: qu'entre tous les triangles ayant une base fixe AB et dont le sommet opposé C est sur une droite MN, celui dans lequel la somme AC + CB est un *minimum,* correspond à telle position de C, que les angles $A\hat{C}M$, $B\hat{C}N$ sont égaux.

Or si ACB est le chemin parcouru, sur un plan non-euclidien, par les deux rayons incidents et réflechis, notre esprit est amené avec toute naturalité à admettre que ce chemin ACB doit conserver, même dans ce cas, sont caractère de *minimum.* Mais comme ce caractère porte à l'égalité des angles $A\hat{C}M$, $B\hat{C}N$ comme dans le plan euclidien, on conclut que *quelle que soit la nature du plan, la réflexion lumineuse se fait de façon, que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.*

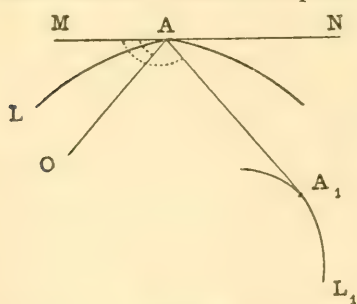



Fig. 39

Quant à la réfraction, nous supposerons qu'elle ait lieu (comme dans l'espace euclidien) sous la condition de la proportionnalité entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction, bien qu'il nous manque toute justification géométrique.

Soit L la ligne donné; L_1 la caustique par réflexion ou réfraction, le point lumineux étant au pôle; A et A_1 deux points correspondants de ces lignes; $\theta = \widehat{OAM}$ et $i = \widehat{A_1AM}$ les inclinaisons du rayon incident $OA = R$ et du rayon réfléchi (ou réfracté) AA_1 sur la ligne L.

Comme la loi de la réflexion porte à la condition $i = \pi - \theta$, on obtient

$$\sin i = \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}. \tag{36}$$

Quant à la loi de la réfraction, elle est exprimée sans plus par la relation

$$\sin i = k \sin \theta = k\sqrt{1 - \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}, \tag{37}$$

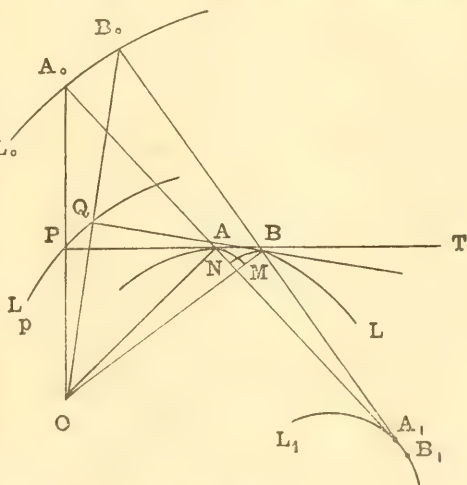
k étant une constante.

Or comme les équations (36), (37) donnent au fond $\sin i$ en fonction de l'arc s de la ligne L, la détermination de la caustique par réflexion ou par réfraction de L peut s'effectuer à l'aide des formules du § 61.

§ 97

Théorème de Quetelet. — L *étant une ligne plane quelconque illuminée par des rayons issus d'un point fixe* O, *abaissons de ce point les perpendiculaires* OP *sur les tangentes de* L, *en les prolongeant de façon qu'il soit* $PA_0 = OP$. *Si* L_0 *est le lieu du point variable* A_0, *la développée* L_1 *de la ligne* L_0 *est la caustique par réflexion de la ligne* L.

Fig. 40

Soient (A, B) deux points infiniment rapprochés de la ligne L, (A_1, B_1), (P, Q) et (A_0, B_0) les points correspondants de la caustique L_1, de la podaire L_p (lieu du point P) et de la ligne L_0.

Après avoir mené les droites (OA, OB), (OPA_0, OQB_0), (A_0A, B_0B), (AA_1, BB_1), décrivons les arcs circulaires infiniment petits AM et BN ayant respectivement les centres O et B_1 et les rayons OA, B_1B.

En désignant par ds_1 l'arc élémentaire A_1B_1 de la caustique L_1, si l'on remarque en outre que $B_1B = B_1N$, on a les formules

$$OB - OA = MB, \quad B_1B - A_1A = B_1B - (B_1N - ds_1 + NA) = ds_1 - NA$$

donnant par addition

$$(B_1B + OB) - (A_1A + OA) = ds_1 - AN + BM \,. \tag{38}$$

Or si l'on désigne par θ l'inclinaison des rayons vecteurs sur la ligne L, et que l'on rappelle la loi de la réflexion, on a les égalités

$$B\hat{A}N = \theta\,, \quad A\hat{B}M = \theta + d\theta\,,$$

d'où il suit, en négligeant des infiniments petits d'ordre supérieur

$$\cos(B\hat{A}N) = \cos(A\hat{B}M) = \cos\theta.$$

Les triangles rectangles infiniment petits ANB, AMB donnent

$$AN = BM = ds \,.\, \cos\theta\,,$$

ce qui réduit la relation (38) à l'autre plus simple

$$(B_1B + OB) - (A_1A + OA) = ds_1\,. \tag{39}$$

Les triangles rectangles (APO, APA_0), (BQO, BQB_0), ... sont évidemment égaux, de sorte que l'on a les relations

$$\text{angle } A_1\hat{A}T = \text{angle } OAP = \text{angle } P\hat{A}A_0 = \ldots\ldots$$

Celles-ci démontrent que les droites AA_0, BB_0, ... sont les prolongements des autres droites A_1A, B_1B, ...

On peut donc écrire les égalités

$$B_1B + OB = B_1B + BB_0 = B_1B_0, \quad A_1A + OA = A_1A + AA_0 = A_1A_0,$$

en vertu desquelles la formule (39) se réduit à l'autre $B_1B_0 - A_1A_0 = ds_1$

Celle-ci, vérifieé tout le long de L_1, démontre que cette ligne est effectivement la développée de L_0.

La démonstration que l'on vient de donner, vaut indifféremment pour les trois plans.

§ 98

Réciproque du théorème de Quetelet. — *Soit* L_1 *la caustique par réflexion d'une ligne* L *(inconnue), par rapport au point lumineux* O, *et* L_0 *une développante de* L_1. *Au milieu* P *de chaque rayon vecteur* OA_0 *élevons la perpendiculaire, en la prolongeant jusqu'à son rencontre* Q *avec la normale correspondante de* L_0. *Le lieu du point* Q *est l'anticaustique par réflexion de la ligne* L_1.

Construisons en effet l'enveloppe des perpendiculaires élevées à l'extrémité des rayons vecteurs OA_0 de la développante L_0, et soit C le point de cette enveloppe correspondant au point A_0 de L_0.

Fig. 41

Nous nous proposons d'abord de *déterminer le segment* A_0C.

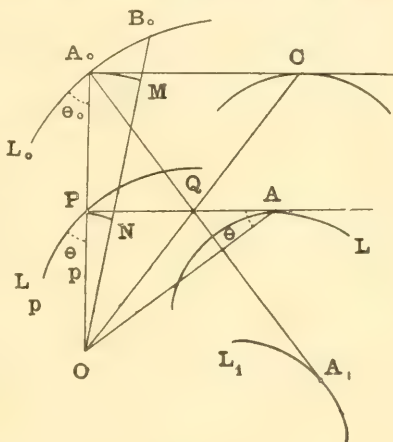
Désignons par s_0, ρ_0, R_0, θ_0 l'arc de la ligne L_0, le rayon de courbure, le rayon vecteur et son inclinaison sur la ligne. On a les relations (§ 32)

$$\cos\theta_0 = \frac{dR_0}{ds_0} = R'_0 , \quad \operatorname{tg}\rho_0 = \frac{\operatorname{tg} R_0 \sqrt{1 - R'^2_0}}{1 - R'^2_0 - \operatorname{tg} R_0 \,.\, R''_0} .$$

En remarquant que la droite générique A_0C coupe la ligne L_0 sous l'angle $i = \frac{\pi}{2} - \theta_0$, on a donc par l'application de l'équation (3) du § 61

$$\operatorname{tg} A_0C = \frac{\operatorname{tg} R_0 \,.\, R'_0}{\sqrt{1 - R'^2_0}} ,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tg} A_0C = \operatorname{tg} R_0 \,.\, \cot\theta_0 . \tag{40}$$

Or si A est le point où la perpendiculaire PQ touche l'enveloppe L, et θ_p l'inclinaison du rayon vecteur $OP = \frac{R_0}{2}$ sur la ligne L_p, on a par l'application de la formule (40)

$$\text{tg}\, PA = \text{tg}\left(\frac{R_0}{2}\right) . \cot \theta_p . \tag{41}$$

Quant au segment PQ, le triangle rectangle OPQ fournit la relation

$$\text{tg}\, PQ = \sin OP . \text{tg}\,(P\hat{O}Q) = \sin\left(\frac{R_0}{2}\right) . \cot \theta_0 . \tag{42}$$

Ces équations (41), (42), combinées entre elles par division, donnent

$$\frac{\text{tg}\, PQ}{\text{tg}\, PA} = \cos\left(\frac{R_0}{2}\right) . \frac{\cot \theta_0}{\cot \theta_p} . \tag{43}$$

Considérons maintenant deux couples de points correspondants infiniment rapprochés (A_0, B_0), (P, T) sur les lignes L_0, L_p, et décrivons les arcs circulaires infiniment petits A_0M, PN de centre O, de rayons respectifs $OA_0 = R_0$, $OP = \frac{R_0}{2}$ et compris à l'intérieur de l'angle infinitésimal $A_0\hat{O}B_0 = \varepsilon$.

Les triangles rectangles infiniment petits A_0MB_0, PNT donnent les relations

$$\cot \theta_0 = \frac{B_0M}{A_0M} = \frac{dR_0}{\sin R_0 . \varepsilon}, \quad \cot \theta_p = \frac{TN}{PN} = \frac{\frac{1}{2}\, dR_0}{\sin\left(\frac{R_0}{2}\right) . \varepsilon},$$

d'où il suit par division

$$\frac{\cot \theta_0}{\cot \theta_p} = \frac{2 \sin\left(\frac{R_0}{2}\right)}{\sin R_0} = \frac{1}{\cos\left(\frac{R_0}{2}\right)},$$

c'est-à-dire

$$\cos\left(\frac{R_0}{2}\right) . \frac{\cot \theta_0}{\cot \theta_p} = 1 . \tag{44}$$

La comparaison des formules (13), (14) démontre que $\operatorname{tg} PQ = \operatorname{tg} PA$, et enfin

$$PQ = PA.$$

Le point Q coïncide donc avec le point A, et le théorème énoncé est démontré.

Démonstration analogue dans le plan lobatschewskien.

§ 99

Applications. — 1° Sur un plan, euclidien ou non, soit L_1 la caustique par réflexion d'une ligne inconnue L, dont on donne la tangente t et le point de contact A. Soit AA_1 une tangente à L_1 passant au point A, et A_0 un point arbitraire de cette tangente. Construisons la développante L_0 de la ligne L_1 passant par A_0, et soit O le point symétrique de A_0 par rapport à la tangente t.

En considérant alors le point O comme le pôle, le théorème du § 98 fournit aisément la construction géométrique de l'anticaustique L. — En remplaçant successivement la ligne L_0 par

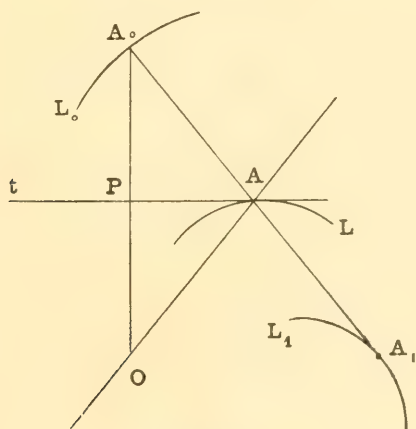



Fig. 42

d'autres développantes de L_1, le point A_0 parcourt la droite A_1A et le point O la droite OA symétrique de A_1AA_0 par rapport à la tangente t.

On obtient ainsi une infinité d'anticaustiques L tangentes à la droite t au point A, et en correspondance une infinité de pôles O distribués sur une droite passant par A. Et comme

cette construction peut être effectuée pour toute autre tangente menée du point A à la ligne L_1, on a le théorème: *Si la caustique donnée* L_1 *est une ligne algébrique de la classe* m, *et que de l'anticaustique* L *soient donnés seulement une tangente* t *et le point de contact* A, *il y a en général plusieurs systèmes d'anticaustiques* (m *tout au plus*), *dont chacun est formé par une infinité de ces lignes. Les pôles correspondants sont rangés sur des droites passant par le point de contact* A.

2° Si l'on veut *construire l'anticaustique d'une ligne donnée* L_1, *en connaissant une de ses tangentes* t *et le pôle* O, on trouve le point A_0 symétrique de O par rapport à la droite t, et la développante L_0 de L_1 passant par A_0. Arrivé à ce point, le théorème du § 98 nous fournit la construction de la ligne cherchée, qui réussit naturellement tangente à t au point A où cette droite est coupée par A_0A_1.

Il y a autant de ces anticaustiques L, que la ligne L_1 a de développantes ou (ce qui revient au même) de tangentes réelles passant au point A_0.

3° *Anticaustique d'un point.* Dans le cas-limite où la caustique L_1 se réduit à un point A_1, sa développante L_0 est un cercle de centre A_1.

Après avoir tiré un rayon vecteur arbitraire OA_0 du cercle L_0, élevons la perpendiculaire au milieu P de OA_0, en la prolongeant jusqu'à son rencontre A avec le diamètre A_0A_1.

Cette construction, effectuée en tous les points du cercle L_0, donne l'anticaustique du point A_1 (§ 98). Il s'ensuite que: *Quelle que soit la nature du plan, l'anticaustique d'un point* A_1 *par rapport au centre lumineux* O, *est le lieu des points où les perpendiculaires au milieu des rayons vecteurs joignant* O *aux points d'un cercle de centre* A_1, *coupent les diamètres correspondants de ce cercle.*

On pourrait, à l'aide de ce théorème, trouver l'équation de l'anticaustique du point.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

PRÓDROMO DA FLORA PORTUGUEZA

POR

GONÇALO SAMPAIO

(Continuação do vol. 5.º, pag. 64)

FAM. XXIX — ANACARDIACEAE, Lindl.

123. PISTÁCIA, Lin.

410. **P. lentiscus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 478.—Desde a Beira ao Algarve. Vulg. *Aroeira, Almessigeira, Lentisco verdadeiro.*

411. **P. terebinthus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 478.—De Traz dos Montes á Beira. Vulg. *Cornalheira, Cornicabra, Terebintho.*

124. RHUS, Tour.

412. **R. coriária,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 475—Traz dos Montes, Douro e Algarve. Vulg. *Sumagre.*

FAM. XXX — PHASEOLACEAE, Lindl.

125. CERATÓNIA, Lin.

413. **C. siliqua,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. I, 307.—Subespontanea e cultivada desde a Beira ao Algarve. Vulg. *Alfarrobeira.*

126. ANAGYRIS, Tour.

414. **A. fœtida,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 69. — Alemtejo e Algarve. Vulg, *Anagíris fedegosa.*

Como ornamental cultiva-se o **Cercis siliquastrum,** Lin. no centro e sul, com o nome de *Olaia* ou *Arvore da Judeia.*

127. ULEX, Lin.

415. **U. europæus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 78. — De norte a sul do paiz. Vulg. *Tojo arnal.*

var. *latebracteatus,* Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 113. — Arredores de Aveiro.
var. *strictus,* Webb. in Ott. hisp. 33. Ulex strictus, Mack. in Transroy.

416. **U. bæticus,** Bois. in Elench. plant. 30; Alph. Luis. in Bol. Soc. Brot. XIX, 253. — Da Bacia do Mondego ao Algarve; Vulg. *Tojo.*

for. *Bourgæanus* (Webb.) Samp. in Man. fl. port. 218; U. Bourgæanus Webb. in Ott. hisp. 39. — Centro e sul.
for. *opistholepis* (Webb.) Samp. in Man. fl. port. 218; U. opistholepis, Webb. in Ott. hisp. 43. — Centro e sul.

417. **U. parviflórus,** Pour., U. australis, Clem.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 114. — Alemtejo. Vulg. *Tojo.*

rac. **Welwitschianus** (Planch.) Samp. in Man. fl. port. 219; U. Welwitschianus Planch. in An. sc. nat. ser. III, 11, 216. — Centro e sul.
var. *Willkommii* (Webb.) Samp. in Man. fl. port. 219; U. Willkommi, Webb.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 115. — Centro e sul.

418. **U. Jussiæi,** Webb. in Ott. hisp. 42. — Entre os rios Vouga e Sado. Vulg. *Tojo.*

419. **U. nánus,** Forst.; Webb. in Ott. hisp. 36. — De norte a sul do paiz. Vulg. *Tojo molar.*

var. *lusitanicus,* Webb. in Ott. hisp., 36. — Extremadura e Algarve.

420. **U. dénsus,** Welw. in sched. ex Planch in An. Sc. nat. sur. III, 11, 215. — Littoral, entre a serra dos Candieiros e da Arrabida. Vulg. *Tojo de charneca.*

421. **U. micránthus,** Lange.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 115. — Desde a Serra d'Arga a Coimbra. Vulg. *Tojo gatenho.*

var. *lusitanicus* (Mariz) Samp. in Man. fl. port. 219; U. lusitanicus, Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 115.

422. **U. argénteus,** Welw. ex Webb. in Ott. hisp., 44. — Baixo Alemjejo e Algarve. Vulg. *Tojo.*

423. **U. erináceus,** Welw. ex Webb. in Ott. hisp. 44. — Littoral do Algarve. Vulg. *Tojo.*

128. STAURACANTUS, Link.

424. **St. népa,** Samp. in Man. fl. port. 219; Ulex nepa, Samp. in herb. Acad. Polyt. Port. — Baixo Alemtejo e Algarve. Vulg. *Tojo gatum.*

for. *Webbiana* (Coss.) Samp. loc. cit.; Ulex Webbianus, Coss. — Algarve.
for. *Escayracii* (Webb.) Samp. loc. cit.; Nepa Escayracii, Webb. in Ott. hisp. 32. — Algarve.
for. *Vaillantii* (Webb) Samp. loc. cit.; Nepa Vaillantii, Webb in Ott. hisp. 31. — Baixo Alemtejo e Algarve.
for. *lurida* (Webb) Samp. loc. cit.; Nepa lurida, Webb in Ott. hisp. 28. — Milfontes.

425. **St. aphyllus,** Link. in Schrad. Jour.; Ulex genistoides, Brot. in Fl. lusit. II, 78. — Littoral, de Ovar ao Algarve. Vlug. *Tojo chamusco, Tojo manso.*

for. *spartioides* (Webb) Samp. loc. cit., 220; St. spartioides, Webb in Ott. hisp. 27.

426. **St. spectábilis,** Webb in Ott. hisp. 27. — Litoral, de Sines ao Algarve. Vulg. *Tojo chamusco.*

129. GENISTÉLLA, Tour.

427. **G. tridentáta** (Lin.) Samp. in Bol. Soc. Brot. XXIV, 35; Genista tridentata, Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 86.— Quasi todo o paiz. Vulg. *Carqueja.*

var. *stenoptera* (Spach) Samp. in Man. fl. port. 220; Pterospartum stenopterum, Willk. — Da Bairrada ao Algarve.
var. *cantabrica* (Spach) Samp. loc. cit. — Do Minho a Cintra.
var. *lasiantha* (Spach) Samp. loc. cit.; Pterosparthum lasianthum, Willk. — Norte e centro.
var. *scolopendrina* (Spach) Samp. loc. cit.; Pterosparthum scolopendrinum, Willk.

130. GENÍSTA, Tour.

428. **G. lusitanica,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 88.—Montanhas altas, desde o Minho e Traz dos Montes à Estrella. Vulg. *Caldoneiro.*

429. **G. Lobelii,** DC.; Willk. in Prod. fl. hisp. III, 431. — Monchique.

var. *histrix* (Lge.) Samp. in Man. fl. port. 221; Genista histrix, Lge.; J. Henriq. in Exp. scient., 103. — De norte a sul do paiz.

raç. **polyanthos** (B. de Röm) Samp. loc. cit.; Genista polyanthos, B. Röm; Willk. in Prod. fl. hisp. III, 432. — Traz dos Montes e Algarve.
var. *Bourgæi* (Spach) Samp. loc. cit.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 109. — Algarve.

430. **G. tenuispina,** Samp. in Man. fl. port. 221; Genista germanica Brot. (non Lin.) in Fl. lusit. II, 90. — De Traz dos Montes ao Alemtejo.

for. *decipiens* (Spach) Samp. loc. cit.; Genista decipiens, Spach.

for. *Tournefortii* (Spach) Samp. loc. cit.; Genista Tournefortii, Spach.
for. *Welwitschii* (Spach) Samp. loc. cit.; Genista Welwitschii, Spach.

431. **G. hirsuta,** Wahl. Symb. I, 81; G. algarbiensis, Brot. in Fl. lusit. II, 89. — Alemtejo e Algarve.

432. **G. berberídea,** Lange; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 108. — Da Serra d'Arga (Minho) ao Douro littoral. Vulg. *Arranha lobos.*

433. **G. ánglica,** Lin.; J. Henriq. in Exp. scient., 103.— Norte do paiz?

var. *ancistrocarpa* (Spach) Samp. in Man. fl. port., 221; Genista ancistrocarpa, Spach.—Norte e sul.

434. **G. falcata,** Brot. in Phyt. lusit. fasc. I (edic. 1.ª), 52. — Do Minho e Traz dos Montes á Beira Baixa. Vulg. *Tojo gadanho.*

435. **G. triacanthos,** Brot. in Phyt. lusit. fasc. I (edic. 1.ª), 54. — De norte a sul do paiz.

for. *Tournefortiana,* Spach. — De norte a sul.
for. *galioides,* Spach. — Centro.

436. **G. micrantha,** G. Ort.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 110. — Regiões altas, desde o Minho e Traz dos Montes á Beira Baixa.

437. **G. Broteri,** Poir.; Genista parviflora, Brot. (non DC.) in Fl. lusit. II, 87. — Serra do Marão e da Estrella. (Especie critica).

438. **G. cinérea,** DC.; J. Henriq. in Exp. scient., 104.

raç. **obtusirámea** (J. Gay) Samp. in Man. fl. port., 222; Genista cinerascens Mariz (non Lge.) in Bol. Soc. Brot. II, 109. — Traz dos Montes e Serra da Estrella.

439. **G. florida,** Lin.; Vandelli in Fl. lusit. et bras. 48.

— Regiões altas, desde o Minho e Traz dos Montes á Serra da Arrabida. Vulg. *Piorno dos tintureiros.*

var. *polygalaephylla* (Brot.) Samp. in Man. fl. port., 222; Genista polygalaephylla, Brot. in Fl. lusit. II, 86; Genista exaltata, Link.; G. polygalaefolia DC. — Gerez e Estrella.

131. CALYCÓTOME, Link.

440. **C. villosa,** Link. in Schr. Jour.; Spartium spinosum Brot. (non Lin.) in Fl. lusit. II, 85. — Alemtejo.

132. SPÁRTIUM, Tour.

441. **Sp. júnceum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 84. — Cult. e subespont. nos muros e rochedos, de norte a sul. Vulg. *Giesta dos jardins.*

442. **Sp. pátens,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 83; Sarothamnus patens, Webb; Cytisus pendulinus, Lin. fil.

raç. **eriocarpus** (Bois. et Reut.) Samp. in Man. fl. port. 223; Sarothamnus eriocarpus, Bois. et Reut.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 119. — Do Minho ao Alemtejo. Vulg. *Giesta negral, Giesta das serras.*

for. *Welwitschii* (Bois. et Reut.) Samp. in loc. cit.; Sarothamnus Welwitschii, Bois. et Reut. — Centro.

443. **Sp. bæticum** (Webb) Samp. in Man. fl. port. 223; Sarothamnus bæticus, Webb in It. Hisp., 52.—Alemtejo. Vulg. *Giesta.*

444. **Sp. grandiflorum,** Brot. in Fl. lusit. II, 80; Sarothamnus grandiflorus, Webb. — De norte a sul. Vulg. *Giesta das sebes.*

445. **Sp. Bourgæi** (Bois.) Samp. in Man. fl. port. 224; Sarothamnus Bourgæi, Bois. — Arredores de Monchique. Vulg. *Giesta.*

446. **Sp. scoparium,** Lin.; Sarothamnus scoparius,

Koch.; Willk. et Lge. in Prod. fl. hisp. III, 458. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Giesta ribeirinha.*

var. *oxyphyllus* (Bois.) Samp. in Man. fl. port. 224; Sarothamnus oxyphyllus, Bois. — Monchique.

447. **Sp. purgans,** Lin.; Cytisus purgans, Willk.; J. Henriq. in Exp. scient., 105; Sarothamnus purgans, Gr. et God. — Serra da Estrella.

448. **Sp. album,** Desf.; Brot. in Fl. lusit. II, 83; Cytisus albus, Link.; Sarothamnus albus, Samp. — Vulg. *Giesta branca.*

var. *lusitanicum* (Quer.) Samp. in Man. fl. port. 223. — Do Minho ao Alto Alemtejo.

133. RETÁMA, Bois.

449. **R. sphærocárpa** (Lin.) Bois.; Spartium sphaerocarpum, Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 84. — De Traz dos Montes ao Alto Alemtejo. Vulg. *Piorno amarello.*

450. **R. monospérma** (Lin.), Bois.; Spartium monospermum, Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 85. — Littoral, entre Tejo e Sado. Vulg. *Piorno branco.*

134. CYTÍSUS, Tour.

451. **C. triflórus,** Herit.; Mariz ia Bol. Soc. Brot. II, 117. — Serra d'Ossa (Alemtejo).

452. **C. monspessulánus,** Lin.; C. candicans, DC.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 117. — Bussaco e Cintra.

453. **C. argenteus,** Lin.; Lotus argenteus, Brot. in Fl. lusit. II, 118; Argyrolobium argenteum, Willk. — Da bacia do Tejo á do Sado.

135. ADENOCÁRPUS, DC.

454. **A. complicatus** (Lin.) J. Gay; Cytisus compli-

catus Brot.; C. hispanicus, Brot. (non Lamk.) in Fl. lusit. II. 91 e 92; Adenocarpus intermedius, DC.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 120 e 121. — Desde o Minho ao Alemtejo. Vulg. *Codeço.*

raç. **commutatus** (Guss.); Samp. in Man. fl. port. 225; Adenocarpus commutatus, Guss.; A. telonensis, DC. — De Traz dos Montes ao Alto Alemtejo.

455. **A. anisóchilus,** Bois. in Diag. pl. or. III, 2. [illegible] — Baixo Alemtejo littoral e Algarve. Vulg. *Codeço.*

456. **A. grandiflórus,** Bois.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 120. — Alemtejo. Vulg. *Codeço.*

136. LUPÍNUS, Tour.

457. **L. álbus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 132. — Cultivado e subespontaneo. Vulg. *Tremoceiro.*

raç. **termis** (Forsk.); Samp. in Man. fl. port. 225; L. termis, Forsk.; L. prolifer, Lamk; Brot. in Fl. lusit. II, 132. — Cultivado e subespontaneo. Vulg. *Tremoceiro da Beira.*

458. **L. angustifolius,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 132.

raç. **linifolius** (Roth.); Samp. in Man. fl. port. 226. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Tremoceiro bravo.*

459. **L. várius,** Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 122. — Norte e centro do paiz. Vulg. *Tremoceiro bravo.*

460. **L. hirsutus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 133. — Da Bairrada ao Algarve.

461. **L. pilosus,** Murr.

raç. **digitatus** (Forsk.); Samp. in Man. fl. lusit. 226; L. Cosentini, Guss.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 122. — Sul do Tejo.

462. **L. hispánicus,** Bois. et Reut.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 122. — Desde o Douro á Beira Baixa.

463. **L. lúteus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 134. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Tremoceiro amarello.*

137. ONÓNIS, Lin.

464. **O. vulgáris,** Rouy; O. spinosa, Brot. in Fl. lusit. II, 96. — Vulg. *Unha-gata, Gatunha, Resta-boi, Rilha-boi.*

raç. **antiquorum** (Lin.); Samp. in Man. fl. port. 227; Ononis antiquorum, Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 101. — Norte do paiz.

var. *campestris* (Koch), Samp. in Man. fl. port. 227; O. campestris, Koch; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 100. — Coimbra?

raç. **procurrens** (Wallr.), Samp. in loc. cit.: O. procurrens, Wallr.; Mariz in loc. cit. 101. — Sul do paiz.

465. **O. pinnáta,** Brot. in Fl. lusit. II, 99. — Beira Baixa (Castello Branco, etc.).

466. **O. alopecuroides,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 98. — Extremadura (Lisboa, etc.).

raç. **trifoliolata,** Coss.; O. Salzmanniana, Bois. et Reut.: Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 109. — Arredores de Lisboa.

467. **O. mitissima,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 97. — Da bacia do Mondego ao Sado.

468. **O. Broteriána,** DC.; O. racemosa, Brot. (non Tunb.) in Fl. lusit. II, 97; O. Bourgæi, Bois. et Reut. — Littoral do centro e sul.

raç. **Picardi** (Bois.) Samp. in Man. fl. port. 227; Ononis Picardi, Bois.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 101. — Da Barraida ao Algarve.

469. **O. serráta,** Forsk.

raç. **diffúsa** (Ten.), Samp. in Man. fl. port. 228; O. diffusa, Ten., Willk. et Lge. in Prod. fl. hisp. III, 398.

470. **O. variegáta,** Lin. — Algarve (Tavira).

471. **O. pusilla,** Lin.; O. Columnæ, All.; Brot. in Phyt. lusit. I, 135, tab. 56; O. parviflora, Lam., Brot. in Phyt. lusit., fasc. I (edic. 1.ª), 57, tab. VI et in Fl. lusit. II, 96.

472. **O. cintrana,** Brot. in Phyt. lusit. I, 138, tab. 57. — De Cintra a Monchique.

473. **O. reclinata,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 97. — Da Bairrada ao Algarve.

var. *tridentata* (Lowe) — Sul do paiz.
var. *mollis* (Savi) — Centro e sul do paiz.

474. **O. pubescens,** Lin.; O. arthropodia, Brot. in Fl. lusit. II, 94 et in Phyt. lusit. I, 141, tab. 58. — Desde Coimbra ao Alemtejo.

475. **O. viscósa,** Lin.; Willk. et Lge. in Prod. fl. hisp. III, 407. — Alto Douro.

raç. **breviflora** (DC.), Samp. in Man. fl. port. 228; O. breviflora, DC.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 104; O. viscosa, Brot. in Fl. lusit. II, 93. — De Coimbra ao Algarve.

476. **O. Hackelii,** Lge. in Diag. pl. iber., 20. — Littoral, desde Sines a Milfontes.

477. **O. nátrix,** Lin.; O. pinguis, Brot. in Fl. lusit. II, 93. — Douro e Algarve.

raç. **hispánica** (Lin. fil.) Samp. in Man. fl. port. 229; O. hispanica, Lin. fil.; Brot. in Fl. lusit. II, 93; O. hispanica + O. ramosissima, Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 104 e 105.

138. MEDICÁGO, Tour.

478. **M. lupulína,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 112. — Desde o Minho e Traz dos Montes á Extremadura.

479. **M. falcáta,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 485. — De

Traz dos Montes á Extremadura. Vulg. *Luzerna de sequeiro.*

480. **M. satíva,** Lin.: Brot. in Fl. lusit. II, 112. — Cultiv. e subespont. de norte a sul do paiz. Vulg. *Luzerna, Melga dos prados.*

481. **M. marína,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 113. — Areaes maritimos, de norte a sul do paiz.

482. **M. orbiculáris** (Lin.) All.; Brot. in Fl. lusit. II, 113; M. polymorpha α. orbicularis, Lin. — Da Bairrada ao Algarve.

var. *marginata* (Willd.). — Bragança.

483. **M. scutelláta** (Lin.) Mill.; Brot. in Fl. lusit. II, 113; M. polymorpha β. scutellata, Lin. — Extremadura e Alemtejo.

484. **M. obscúra,** Retz.; Willk. et Lge. in Prod. fl. hisp. III, 383.

raç. **tornáta** (Willd.); Medicago tornata, Willd.; Brot. in Fl. lusit. II, 114. — Desde o Minho littoral ao Algarve.

var. *muricata* (Willd.). — Do Minho ao Algarve.

485. **M. littorális,** Rohde; Willk. et Lge. in Prod. fl. hisp. III, 384. — Costa maritima, desde norte a sul.

var. *breviseta,* DC. — Com o typo.

486. **M. tuberculáta,** Willd.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 98. — Lisboa (Serra de Monsanto).

487. **M. truncátula,** Gærtn.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 97. — Sul do paiz.

raç. **tribuloides** (Desr.), Samp. in Man. fl. port. 232. — De Coimbra para sul.

488. **M. turbináta** (Lin.) Willd.; M. muricata, Brot. (non Willd.) in Fl. lusit. II, 116. — Desde Traz dos Montes ao Algarve.

var. *aculeata* (Gærtn) — Com o typo.

489. **M. múrex,** Willd.; Samp. in An. Sc. Nat. x, 28 et in Bol. Soc. Brot. xxiv, 37. — Buarcos e Millfontes.

var. *ovata* (Carm.) — Com o typo.

490. **M. rigídula** (Lin.) Desr.; M. villosa, Brot. in Fl. lusit. ii, 116. — Do Alto Douro a Coimbra.

491. **M. mínima,** Gruf. in Lin.; Brot. in Fl. lusit. ii, 115. — De Traz dos Montes ao Alemtejo.

var. *recta* (Willd.) — Centro.

492. **M. arábica** (Lin.) All.; Brot. in Fl. lusit. ii, 115; M. polymorpha var. arabica, Lin. — De Traz dos Montes ao Algarve.

493. **M. híspida,** Gærtn; M. ciliaris, Brot. (non Krock) in Fl. lusit. ii, 114. — Quasi todo o paiz.

var. *apiculata* (Willd.) — Com o typo.

raç. **lappácea** (Desr.) Samp. in Man. fl. port. 230; M. lappacea, Desr. — Quasi todo o paiz.
var. *nigra* (Willd.) — Com a raça.
var. *terebéllum* (Willd.) — Com a raça.

494. **M. ciliaris** (Lin.) Krock.; M. polymorpha var. ciliaris Lin.; M. intertexta, Brot. (non Mill.) in Fl. lusit ii, 114. — Arredores de Lisboa.

139. MELILÓTUS, Tour.

495. **M. messanensis** (Lin.) All., Mariz in Bol. Soc. Brot. ii, 95; Trifolium messanensis, Lin. — Para o sul do rio Douro.

496. **M. segetális** (Brot.) Ser.; Trifolium Melilotus segetalis, Brot. in Fl. lusit. ii, 484; M. segetalis + M. infesta Mariz (non Guss.) in Bol. Soc. Brot. ii, 94 e 95; M. leiosperma, Pomel. — Para o sul do Mondego. Vulg. *Anaphe.*

var. *fistulosa* (Som.). — Centro.

raç. **compacta** (Salz.) Samp. in Man. fl. port., 232; Melilotus compacta, Salz. — Margens do rio Douro,

497. **M. neapolitana,** Ten., Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 93. — Margens de Tejo?

rac. **odoratíssima,** Samp. in Man. fl. port., 232; Melilotus altissima, Samp. (non Thuil) in An. Sc. Nat. VI, 72. — Margens do rio Douro.

498. **M. elégans,** Salz.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 94; Trifolium Melilotus officinalis, Brot.? — Alemtejo.

499. **M. índica** (Lin.) All.; Trifolium Melilotus indica, Brot. in Fl. lusit. II, 102; Melilotus parviflora, Desf. — Quasi todo o paiz. Vulg. *Meliloto, Anaphe, Coroa de rei.*

500. **M. álba,** Desr.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 93. — Margens do rio Douro.

140. TRIGONÉLLA, Lin.

501. **T. fœnum-græcum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 117. — Extremadura e Alemtejo. Vulg. *Alforvas, Hervinha, Feno grego.*

502. **T. polycerata,** Lin.; Samp. in An. Sc. Nat. VI, 72. — Margens do rio Douro.

var. *ambigua,* Samp. in Man. fl. port. 233; Trigonella ambigua, Samp. in An. Sc. Nat. VI, 144. — Margens do rio Douro.
var. *Amandiana,* Samp in Man. fl. port. 233; Trigonella Amandiana. Samp. in An. Sc. Nat. VI, 143.
var. *longipes,* Samp. in Man. fl. port., 233; Trigonella Amandiana var. pinnatifolia, Samp. in An. Sc. Nat. VI, 144.

503. **T. monspelíaca,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 117. — Traz dos Montes e Algarve.

141. TRIFOLIUM, Tour.

504. **T. ornithopodioides** (Lin.) Sm.: Trifolium Melilotus-ornithopodioides, Lin.; Falcatula falso-trifolium,

Brot. in Phyt. lusit. I. 160, tab. 65; Trigonella ornithopodioides, DC.; Falcatula ornithopodioides, Samp. in Man. fl. port., 234. — Littoral, de Caminha a Lisboa.

505. **T. campéstre,** Schreb.; T. procumbens, Lin. p. p.; Brot. in Fl. lusit. II, 110. — Quasi todo o paiz.

506. **T. dúbium,** Sibth.; T. procumbens, Lin. p. p.; T. filiforme, Lin. p. p.; Brot. in Fl. lusit. II, 111. — Quasi todo o paiz.

507. **T. micránthum,** Viv.; T. filiforme, Lin. p. p.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 85.—Norte e centro do paiz.

508. **T. suffocátum,** Lin.; Brot. in Ph. lusit. I, 158, tab. 64. — Desde o Minho ao Algarve.

509. **T. cérnuum,** Brot. in Phyt. lusit. I, 150, tab. 62. — Do Minho ao Algarve.

510. **T. répens,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 103.—Todo o paiz. Vulg. *Trevo.*

511. **T. nigréscens,** Viv., Willk. et Lge. in Prod. fl. hisp. III, 356; T. hybridum Savi (non Lin.); Brot. in Fl. lusit. II, 103. — Centro e sul do paiz.

512. **T. Micheliánum,** Savi; Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 108. — Arredores de Lisboa.

513. **T. isthmocárpum,** Brot. in Phyt. lusit. I, 148, tab. 61. — Centro e sul do paiz.

514. **T. spumósum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 109. — Centro e sul do paiz.

515. **T. fragíferum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 109. — De Traz dos Montes ao Algarve.

for. *pulchellum* (Lge.) — Terrenos seccos.
var. *aragonense* (Willk.) — Algarve.

516. **T. physódes,** Stev.; T. Cupani, Tiv.; Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 88. — De Coimbra a Lisboa.

517. **T. resupinatum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 109. — Do Porto ao Algarve.

var. *Clusii* (God. et Gren.). — Quasi todo o paiz.

518. **T. tomentósum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 110. — Do Porto ao Algarve.

519. **T. levigátum,** Poir.; T. strictum, Lin. p. p.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 87. — De Traz dos Montes á Beira Baixa.

520. **T. glomerátum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 108. — Quasi todo o paiz.

521. **T. subterráneum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 103. — Todo o paiz.

522. **T. scábrum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 107. — Do Porto ao Algarve.

523. **T. Boccónei,** Savi; T. semiglabrum, Brot. in Phyt. lusit. I, 155, tab. 63, fig. 2.ª — Desde o Douro ao Algarve.

524. **T. geméllum,** Pour.; Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 108. — Bragança.

525. **T. striátum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 107. — Quasi todo o paiz.

var. *brevidens,* Lge. — Do Douro ao Alemtejo.
var. *spinescens,* Lge. — Do Douro ao Algarve.

526. **T. ligústicum,** Balb.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 99 (excl. sym.). — Desde o Douro ao Algarve.

527 **T. diffúsum,** Ehrh.: T. purpurascens, Roth.; Brot. in Fl. lusit. II, 105. — Da Beira Baixa ao Alto Alemtejo.

528. **T. hírtum,** All.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 91. — Alto Douro e Traz dos Montes.

529. **T. Chérleri,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 104. — De Traz dos Montes ao Algarve.

530. **T. stellátum,** Lin.: Brot. in Fl. lusit. II, 107.—Do Douro ao Algarve.

531. **T. lagópus,** Pour.; Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 108. — Arredores de Bragança.

532. **T. incarnátum,** Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 90. — Cultiv. e subesp. de norte a sul. Vulg. *Trevo vermelho.*

533. **T. angustifólium,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II. 106. — Desde Traz dos Montes ao Algarve.

534. **T. arvense,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 106.—Todo o paiz. Vulg. *Pé de lebre.*

535. **T. lappáceum,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 104.— Desde a Bairrada ao Algarve.

for. *arrectisétum* (Brot.); T. arrectisetum, Brot. in Phyt. lusit. I, 152, tab. 63, fig. 1.ª (non auct. mult.). — Com o typo, em várias localidades.

536. **T. marítimum,** Huds.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 91. — Desde Aveiro ao Algarve.

537. **T. leucánthum,** M. Bieb.; Mariz in Bol. Soc. Brot. III, 108. — Arredores de Bragança.

538. **T. squarrósum,** Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 91 (excl. sym. Brot.). — Da Beira ao Alemtejo.

539. **T. pratense,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 105.—Todo o paiz. Vulg. *Trevo dos prados.*

var. *bracteatum* (Schousb.) — Quasi todo o paiz.

raç. **nivále** (Sieb.); T. pratense β. hirsutum Bois. Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 105.

var. *semipurpureum* (Strobl.); T. pratense. var. pyrenaicum, Mariz in loc. cit.

540. **T. ochroléucum,** Huds.; Brot. in Fl. lusit. II, 106, ex Hoff.? — Traz dos Montes?

raç. **lusitanicum,** Samp. in Man. fl. port. 242; T. squarrosum, Brot. (non Lin.) in Fl. lusit. II, 106. — Beira Baixa e Alto Alemtejo.

541. **T. médium,** Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 89.— Traz dos Montes.

142. PSORÁLEA, Lin.

542. **P. bituminosa,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 100.— Desde o Douro ao Algarve. Vulg. *Trevo bituminoso.*

543. **P. americana,** Lin.

var. *polystachia* (Poir.); P. dentata, DC.; Mariz in exsic. Soc. Brot. n.° 1142. — Subespontanea em Lisboa.

143. TETRAGONÓLOBUS, Scop.

544. **T. purpúreus,** Moench; Mariz in Bol. Sóc. Brot. II, 81. — Bragança.

144. LÓTUS, Tour.

545. **L. edúlis,** Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 82. — Algarve.

546. **L. ornithopodioides,** Lin.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 82. — Algarve.

547. **L. créticus,** Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 120. — Litoral, de Coimbra ao Algarve.

for. *Salzmanni* (Bois. et Reut.); L. Salzmanni, Bois. et Reut. in Pug. 37 (non L. commutatus Gouss.).

548. **L. conimbricénsis,** Brot. in Phyt. lusit. fasc. I (edic. 1.ª an. 1800); Fl. lusit. II, 128; Phyt. lusit. I

(edic. 2.ª an. 1816), 127, tab. 53; L. coimbrensis, Willd. (an. 1800). — Da Bairrada ao Algarve.

549. **L. parviflórus,** Desf.; L. microcarpos, Brot. in Fl. lusit. II, 119. — Quasi todo o paiz.

550. **L. angustíssimus,** Lin.; L. oligoceratos Brot. (?) in Fl. lusit. II, 118. — Coimbra?

var. *macrorrhizus,* Samp. in An. Sc. Nat. VI, 145. — Douro littoral.

551. **L. híspidus,** Desf.; Willk. et Lge. in Prod. fl. hisp. III, 347. — Todo o paiz.

raç. **castellánus** (Bois. et Reut.), Samp. in Bol. Soc. Brot. XXIV, 40; L. castellanus Bois. et Reut.; L. angustissimus Brot. (non Lin.) in Fl. lusit. II, 119. — De Coimbra ao Algarve.

552. **L. arenárius,** Brot. in Fl. lusit. II, 120. — Areaes maritimos, no centro do paiz.

553. **L. corniculátus,** Lin.; L. corniculatus arvensis Brot. in Fl. lusit. II, 121. — Todo o paiz.

var. *pedunculatus* (Cav.). — Algumas localidades, de norte a sul.

var. *alpinus* (Schl.); L. glareosus μ gracilis, Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 82. — Serra da Estrella.

raç. **longipes,** Samp. in Man. fl. port. 244; L. hispidus var. longipes Samp. in An. Sc. Nat. VI, 145.

554. **L. uliginósus,** Schk.; L. corniculatus silvaticus, Brot. in Fl. lusit. II, 121. — Todo o paiz.

var. *villosus* (Thuill.) — Littoral.

145. DORYCNIUM, Tour.

555. **D. penthaphyllum,** Scop.; Lotus dorycnium, Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 122.

raç. **suffruticósum** (Vill.); D. suffruticosum Vill.;

Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 81. — De Traz dos Montes ao Algarve.

raç. **Jordáni** (Lor. et Bar.), Samp. in Bol. Soc. Brot. XXIV, 39. — Baixo Alemtejo littoral.

556. **D. hirsútum,** Ser.; Lotus hirsutus, Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 123; Bonjeania hirsuta, Rchb.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 81. — Arredores de Monchique.

var. *prostratum* (Jord. et Four.), Samp. in Bol. Soc. Brot. XXIV, 39. — Milfontes.

557. **D. réctum,** Ser.; Lotus rectus, Lin.; Brot. in Fl. lusit. II, 123; Bonjeania recta, Rchb.; Mariz in Bol. Soc. Brot. II, 81. — De Coimbra ao Algarve.

(Continúa.)

BIBLIOGRAPHIA

DÉSIRÉ ANDRÉ: *Des notations mathématiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Esta obra importante é para o calculo mathematico o mesmo que são para a litteratura os manuaes que ensinam a escrever com correcção e elegancia. Encontram-se nella indicações sobre a fórma, significação e historia das notações usadas em Mathematica, e regras para bem as escolher e bem as empregar.

Nenhum livro existia até hoje consagrado ao assumpto que é objecto d'este, e a sua utilidade é evidente. Póde mesmo concorrer para se estabelecer a unidade das notações em questões em que são usadas mais do que uma notação. É um livro que deve ser lido por todos os mathematicos, não só pelos que escrevem, mas tambem pelos que consagram a sua actividade ao ensino. Estes ultimos devem lembrar-se que entre os alumnos de hoje estão os geometras do futuro, que devem saír das escolas habilitados a escrever com correcção.

G. T.

EDGARDO CIANI: *La prospettiva cavaliera a quarentacinque gradi*. Milano, Hoepli, 1903.

Neste livro é systematicamente desenvolvida de um modo muito claro e simples a parte fundamental da doutrina relativa á perspectiva cavaleira, considerando-se os problemas metricos e de posição que resultam de combinar do modo mais simples e usual os pontos, rectas e planos. O auctor dá aos raios projectantes a inclinação de 45°, e indica as vantagens que resultam d'esta escolha.

G. T.

Ernest Lebon: *Savants du jour*. Paris, Gauthier-Villars.

Sob o titulo de *Savants du jour*, vem de fundar M. E. Lebon uma publicação muito util, muito bella e muito interessante. Cada caderno contém a biographia e o retrato de um sabio contemporaneo e as listas dos seus titulos e dos seus escriptos, sendo estes acompanhados muitas vezes de indicações succintas sobre o seu objecto. Contém ainda cada caderno documentos relativos ao sabio a que o caderno é consagrado, proprios a poder-se apreciar o seu valor. Quatro cadernos foram até hoje publicados, consagrados respectivamente o primeiro a M. Poincaré, o segundo a M. Darboux, o terceiro a M. Picard e o quarto a M. Appell. As biographias d'estes geometras eminentes estão escriptas com bella fórma litteraria e lèem-se com muito interesse e viva satisfação. O caderno consagrado a M. Poincaré contém ainda o formoso discurso pronunciado por M. Masson na occasião do recepção do illustre geometra na Academia franceza, a allocução pronunciada por Fr. Darwin ao entregar-lhe a medalha de ouro da Sociedade Astronomica de Londres, etc.; o caderno consagrado a M. Darboux contém o relatorio lido por M. Jordan á Academia das Sciencias de Paris em 1884, na occasião em que esta Academia concedeu a M. Darboux o premio denominado *Petit d'Ormoy*; o caderno consagrado a M. Picard contém o relatorio lido por M. Poincaré á Academia das Sciencias de Paris, em 1888, quando foi concedido áquelle illustre geometra o grande premio de Sciencias mathematicas, uma analyse de Enriques sobre a obra de M. Picard relativa á theoria das funcções algebricas de duas variaveis independentes, etc.; o caderno consagrado a M. Appell contém o relatorio de Hermite sobre a memoria apresentada por aquelle eminente geometra ao concurso aberto por S. M. o Rei da Suecia Oscar II e coroada em 1889 e o relatorio de M. Darboux conferindo-lhe, em nome da Academia das sciencias de Paris, o premio *Bordin*.

A bella collecção que tão felizmente fundou M. Lebon merece figurar em todas as bibliothecas publicas e nas bibliothecas de todos os que se interessam pela sciencia.

G. T.

Jules Tannery: *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle*. Deuxième édition. Deux volumes. Paris, Hermann, 1904-1910.

Não é necessario fazer o elogio d'esta obra tão conhecida pelos geometras de todos os paizes. A exposição dos principios fundamentaes da Analyse, quando se quer ser rigoroso, obriga a extensões e desenvolvimentos muitas vezes deselegantes e mesmo fastidiosos. Ora sabe-se bem que Tannery evitou este escolho do modo o mais feliz, expondo as doutrinas debaixo de uma fórma logica impeccavel a ao mesmo tempo elegante e agradavel. É nesta parte um livro modelar.

Na segunda edição da sua obra, o illustre auctor não se limitou a reproduzir os assumptos da primeira edição. Reviu-os, aperfeiçou-os e accrescentou varias doutrinas importantes. Porisso aquelles que conhecem a antiga edição lerão ainda com interesse e prazer a que vem de ser publicada.

Depois de escriptas estas linhas, tivemos a triste noticia da morte do geometra a que vimos de nos referir. Quando ha pouco tempo visitámos as escolas de Paris, fomos recebidos por elle de modo extremamente affectuoso na Escola Normal Superior, estabelecimento de que elle era o director, e tivemos a honra de ser por elle apresentado, em termos para nós muito agradaveis, a alguns professores e alumnos d'esta grande escola. Conversámos durante muito tempo sobre o ensino das mathematicas e, referindo-se á obra de que vimos de dar noticia, disse-nos que teria o prazer de nos offerecer um exemplar logo que a impressão terminasse. Mal diriamos então, ao vêl-o tão bem disposto, que a morte pairava já á róda d'elle e que essa voz que estavamos ouvindo com tanto prazer em breve se extinguiria para sempre!

Tannery foi um dos redactores do *Bulletin des sciences mathématiques*, onde escreveu numerosas noticias bibliographicas, a que soube dar sempre uma fórma original e um interesse especial.

G. T.

G. Castelnuovo: *Lezioni di Geometria analitica* (2.ª edição), Roma, 1909.

Contém este volume as lições sobre Geometria analytica e projectiva dadas pelo sr. Castelnuovo na Universidade de Roma. Por influencia de Cremona e Cerruti, a Geometria analytica e a

Geometria projectiva foram reunidas nesta Universidade em uma mesma cadeira, da qual o auctor do livro mencionado é actualmente o professor. Por isso, nas suas lições, são estudados ambos estes methodos.

Esta reunião da Geometria analytica e da Geometria projectiva em uma mesma cadeia parece-nos ter grandes vantagens. Habilitam-se assim os alumnos a escolher em cada questão geometrica o methodo mais appropriado para a resolver, e a empregar mesmo simultaneamente os dois methodos, de modo a chegar ao resultado final pelo caminho mais curto, mais expressivo e mais elegante.

Devo ajuntar ao que precede que esta reunião dos dois methodos não é feita pelo Sr. Castelnuovo desde o principio do seu livro. Como os alumnos têem sempre difficuldade em assimilar os principios de cada um d'elles, o illustre sabio expõe primeiramente a Geometria analytica do plano, á qual consagra as primeiras 109 paginas, depois a Geometria analytica do espaço, á qual consagra 70 paginas, em seguida os conceitos da Geometria projectiva (198 paginas), e finalmente, faz o estudo geral das curvas e das superficies de segunda ordem, applicando simultaneamente as doutrinas da Geometria analytica e da Geometria projectiva expostas nas partes anteriores da obra (245 paginas).

Póde-se louvar com toda a confiança o methodo seguido pelo auctor, e é desejavel que em nova organisação, que se impõe, do ensino mathematico nas nossas escolas, seja elle introduzido. Accrescentaremos que a obra é rica em assumptos, e que está escripta com grande clareza e elegancia, como era de esperar da alta situação do Sr. Castelnuovo na sciencia italiana; e que, em seguida a cada capitulo, vèem numerosos exercicios, escolhidos de modo, que, para os alumnos, ao proveito de os resolverem se junta o de conhecerem resultados que offerecem interesse.

G. T.

Appell et S. Dautheville: *Précis de Mécanique rationnelle.* Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Esta obra excellente é destinada aos que pretenderem estudar a Mecanica racional como introducção ao estudo da Physica ou da Mecanica applicada. Póde-se recommendar vivamente aos alumnos de Mecanica racional da nossa Academia Polytechnica, que encontrarão nella as doutrinas que é essencial saber para

a continuação dos seus estudos de Engenharia, expostas debaixo de fórma a mais clara, a mais elegante e a mais adequada ao fim a que se destinam. Além d'isso, aquelles que pretenderem levar mais longe os seus estudos da Mecanica racional, ficam naturalmente encarreirados para poder continuar estes estudos no grande e magistral Tratado de M. Appell.

Eis o objecto de cada um dos capitulos em que se divide a obra: I. Vectores. — II. Cinematica. — III. Principios de Mecanica: massa, força, trabalho. — IV. Equilibrio de um ponto. Equilibrio de um systema. — V. Equilibrio de um corpo solido. — VI. Systemas deformaveis. — VII. Dynamica do ponto. — VIII. Momentos de inercia. — IX. Dynamica dos systemas. Theoremas geraes. As sete equações universaes do movimento. — X. Movimento de um corpo solido. — XI. Noções sobre o attricto. — XII. Percussões. — XIII. Principio dos trabalhos virtuaes. — XIV. Principio D'Alembert. Equações de Lagrange. — XV. Percussões. Theorema de Carnot. — XVI. Attração. Potencial. — XVII. Equilibrio e movimento interior de um fluido perfeito. — XVIII. Movimento dos fluidos perfeitos. Hydrodynamica.

Todos estes assumptos são expostos de um modo bastante desenvolvido em 650 paginas da obra.

Depois seguem-se numerosos exercicios, quasi todos propostos como prova escripta nos exames de Mecanica racional nas Faculdades de França.

G. T.

E. Belot: *Essai de Cosmogonie turbillonaire.* Paris, Gauthier-Villars, 1911.

O auctor, depois de indicar, em uma introducção, os defeitos da celebre e engenhosa hypothese cosmogonica de Laplace, expõe e estuda uma outra, em que a formação dos mundos resulta do choque de um turbilhão gazoso sobre uma nebulosa amorpha. Todo o volume é destinado á exposição e desenvolvimento d'esta ideia, e a mostrar que os factos contrarios á theoria de Laplace são pela nova theoria completamente explicados, e que mesmo d'ella resultam consequencias novas que a observação confirma.

G. T.

A. Boulanger: *Hydraulique générale.* — Tome I. *Principes e problèmes fondamentaux.* — Tome II. *Problèmes à singularités et applications.* Paris, Octave Doin et Fils, 1909.

Esta obra tem por fim principal compendiar, coordenando e resumindo, os numerosos e notabilissimos trabalhos de M. Boussinesq, que são incontestavelmente os que nos ultimos tempos mais teem contribuido para dar á Hydraulica um caracter verdadeiramente scientifico.

Por louvavel iniciativa de M. D'Ocagne, illustre director da *Bibliothèque de Mécanique appliquée et Génie*, encarregou-se M. Boulanger d'esta tarefa utilissima, prestando assim um valioso serviço a todos aquelles a quem interessa conhecer os notaveis progressos que a Mecanica dos fluidos tem feito, e que difficilmente poderiam recorrer aos trabalhos de M. Boussinesq, muitos dos quaes se acham disseminados em publicações, que nem sempre são de facil consulta.

Comprehende a obra dois volumes. O primeiro trata da exposição dos principios fundamentaes da sciencia e do estudo dos phenomenos geraes observados no movimento dos liquidos. O segundo occupa-se dos problemas mais importantes que a Hydraulica pratica nos apresenta, e que as modernas theorias permittem muitas vezes resolver sem lançar mão das formulas empiricas anteriormente empregadas.

R. Mendes.

Ed. Barbette: *Les sommes de* p^ièmes *puissances distinctes égales à une* p^ième *puissance.* Liège, 1910.

Abre esta interessante memoria por um estudo preliminar sobre o calculo das potencias semelhantes dos x primeiros numeros inteiros. Vem depois o estudo do problema que tem por objecto determinar os numeros inteiros distinctos cuja somma tem um mesmo valor. Segue o estudo do problema que tem por fim determinar os quadrados distinctos cuja somma é egual a um quadrado, e depois o problema que tem por objecto determinar as potencias de gráu p distinctas cuja somma é egual a uma potencia do mesmo gráu. Contém ainda a mesma memoria um estudo dos numeros polygonaes de n lados e duas taboas, uma contendo os 5:000 primeiros numeros triangulares e a outra contendo os 10:000 primeiros numeros primos.

Não é possivel indicar aqui os methodos seguidos pelo auctor

para resolver os differentes problemas de que se occupa, e terminaremos porisso esta rapida noticia recommendando a leitura d'este interessante trabalho.

G. T.

A. Claude et L. Driencourt: *Description et usage de l'astrolabe à prisme.* Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Contém este livro utilissimo um estudo muito completo dos astrolabios de prisma, e suas applicações. Encontra-se nelle a descripção dos diversos modelos de astrolabios de prisma, o estudo dos erros instrumentaes, a maneira de determinar por meio d'elles a latitude e a hora, etc. Contém ainda o livro uma série de taboas para a simplificação dos calculos a que leva o uso d'estes instrumentos. Ajuntaremos que muita da doutrina que o livro encerra é nelle exposta pela primeira vez.

G. T.

Annuaire pour l'an 1911 publié par le Bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars.

O presente volume d'este bem conhecido Annuario contém as noticias scientificas seguintes:

Poincaré: *Note sur le* XVI^e^ *conférence de l'Association géodésique internationale.*

Bigourdan: *Le eclipse du soleil du 17 avril 1912.*

Poincaré: *Notice nécrologique sur M. Bouquet de la Grye.*

QUELQUES OBSERVATIONS
SUR LES GROUPES D'HOMOGRAPHIES DANS UN PLAN

NOTE DE

M. L. Orlando

Nous avons ici le but, bien modeste, de demontrer d'une façon simple et élémentaire un théorème rentrant dans une classification, plus générale, bien connue par les géomètres.

Les groupes finis d'homographies planes, doués d'homologies d'ordre $n > 3$, *appartiennent à l'une des deux classes:*

A) *Groupes laissant invarié un point (et une droite qui ne passe pas par ce point),*

B) *Groupes laissant invarié un triangle, dont ils permutent transitivement les sommets.*

Les idées que l'on trouvera ici exposées sont nées, il y a bien de temps, dans des conversations avec mon éminent maître M. G. Bagnera; s'il eût eu un élève plus attentif, les résultats en seraient bien plus brillants.

1. Etablissons d'abord que, *si l'un de nos groupes est doué d'homologies d'ordre* $n > 5$, *alors il rentre dans l'une des deux classes* A), B)

Soit donc G un group fini d'homographies planes, et supposons qu'il contienne une homologie σ_1 d'ordre $n > 5$; le centre de cette homologie soit O_1.

Si toutes les homographies de G laissent fixe le point O_1, alors le groupe G appartient à la classe A).

Mais si cela, au contraire, n'arrive pas, alors le point O_1, devra passer dans une autre position O_2. Si O_1 ne se déplace pas davantage, alors la droite $O_1 O_2$ reste fixe, et nous sommes dans la classe A).

Supposons donc, dans une autre hypothèse, que le point O_3, different de O_1 et de O_2, soit encore un transformé de O_1.

L'homologie σ_1, de centre O_1, et la transformée σ_2, de centre O_2, donnent origine a un groupe Γ, contenu dans G. Ce groupe Γ tracera sur la droite $O_1 O_2$ un groupe d'homographies, γ. Nommons $X_1 X_2$ les respectifs points de rencontre de la droite $O_1 O_2$ avec les axes des deux homologies σ_1, σ_2: on verra que dans le groupe γ il y a deux homographies d'ordre $n > 5$, dont les points O_1, X_1 et O_2, X_2 seront respectivement les pôles. Les points X_1, X_2 sont distincts, car ont sait que deux homographies sur une droite, si elles appartiennent à un groupe fini, ne peuvent avoir un pôle commun sans avoir commun aussi l'autre. Le point X_1, ne peut coïncider avec O_1, car une homologie ayant son centre sur son axe ne saurait appartenir a un groupe fini.

Mais c'est une chose bien connue que sur la droite n'existent pas des groupes finis contenant des homographies d'ordre $n > 5$ à pôles distincts, donc X_1 devra coïncider avec O_2 et X_2 avec O_1. L'axe de l'une des deux homologies σ_1, σ_2 passera alors par le centre de l'autre. Mais, pour les mêmes raisons, les axes de σ_1, σ_2 devront passer par O_3; donc O_3 a dans le plan une position obligée, c'est-à-dire la rencontre des deux axes de σ_1, σ_2. Cela démontre que O_1, O_2, O_3 sont toutes les possibles positions de O_1; le triangle $O_1 O_2 O_3$ reste donc invarié, et ses sommets se permutent transitivement: nous nous retrouvons donc dans la classe B).

2. Établissons maintenant cet autre fait: *si l'un de nos groupes contient des homologies d'ordre 5, il rentre dans* A), B). Soit O_1 le centre d'une homologie d'ordre 5 appartenant au groupe. Nous supposerons dorenavant que les transformés de O_1 ne se trouvent pas tous sur l'axe de l'homologie σ_1, dont O_1 est le centre; sinon on se retrouverait dans les cas précédents. Soit donc O_2, hors de l'axe de σ_1, un transformé de O_1. Appelons O le point de rencontre des deux axes OX_1, OX_2 des deux homologies σ_1, σ_2. Cas deux homologies donnent naissance à un groupe Γ, contenu dans notre groupe G; ce groupe Γ trace sur la droite $O_1 O_2$ un groupe γ, qui aura deux homographies à pôles distincts: alors le groupe γ ne saurait être que le groupe de l'icosaèdre. Nous verrons tout de suite que, dans ce cas, le groupe principal G devra appartenir à la classe A).

Prenons des coordonnées triangulaires; et soit $x_3 = 0$ l'équation de la droite $O_1 O_2$; $x_2 = 0$ celle de la droite OO_1; $x_1 = 0$

celle de la droite $O_2 O$. Dans ce système, l'homologie σ_1 sera representée par la substitution linéaire

$$P_5 = \left| \begin{array}{l} x'_1 = \alpha^2 x_1 \\ x'_2 = \overline{\alpha} x_2 \\ x'_3 = \overline{\alpha} x_3 \end{array} \right.$$

où α est l'une des racines d'ordre 5 de l'unité, et $\overline{\alpha}$ sa conjuguée. Les multiplicateurs $\alpha^2, \overline{\alpha}, \overline{\alpha}$ pourraient être alterés par des racines cubiques de l'unité, mais ces racines cubiques ne saurait être inégales, car étant 3 et 5 des nombres premiers, en résulteraient de même inégales les 5èmes puissances.

La P_5 déterminera sur la droite $O_1 O_2$ une homographie d'ordre 5, dont O_1, X_1, seront les pôles.

Or nous savons que dans le groupe de l'icosaèdre il existent des homographies (d'ordre 2) permutant les pôles des homographies d'ordre 5. Si nous transformons P_5 de manière à permuter les pôles O_1, X_1, nous obtenons

$$Q_5 = \left| \begin{array}{l} x'_1 = \overline{\alpha} x_1 \\ x'_2 = \alpha^2 x_2 \\ x'_3 = \overline{\alpha} x_3. \end{array} \right.$$

L'homologie representée par Q_5 appartient naturellement au groupe G; mais alors il en sera de même du produit

$$P_5 Q_5 = \left| \begin{array}{l} x'_1 = \alpha x_1 \\ x'_2 = \alpha x_2 \\ x'_3 = \overline{\alpha}^2 x_3 ; \end{array} \right.$$

cette dernière homologie a le centre en O, et elle a pour axe la droite $O_1 O_2$.

Mais dans le groupe de l'icosaèdre nous avons aussi des homographies d'ordre 2. Prenant pour sommets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ du triangle de référence les deux pôles de l'une de ces homographies, et laissant en O le troisième sommet, on exprimera

cette homographie comme il suit

$$P_2 = \left| \begin{aligned} x'_1 &= \bar{\beta}\, x_1 \\ x'_2 &= -\bar{\beta}\, x_2 \\ x'_3 &= -\beta^2 x_3 . \end{aligned} \right.$$

Mais dans γ il existe aussi des homographies (d'ordre 2) qui permutent les pôles des homographies d'ordre 2; transformant, nous obtenons donc

$$Q_2 = \left| \begin{aligned} x'_1 &= -\bar{\beta}\, x_1 \\ x'_2 &= \bar{\beta}\, x_2 \\ x'_3 &= -\beta^2 x_3 . \end{aligned} \right.$$

Le produit

$$P_2 Q_2 = \left| \begin{aligned} x'_1 &= -\bar{\beta}^2 x_1 \\ x'_2 &= -\bar{\beta}^2 x_2 \\ x'_3 &= \beta^4 x_3 \end{aligned} \right.$$

est une homologie *d'ordre pair* qui a son centre en O, et qui a pour axe la droite $O_1 O_2$. Elle aura donc entre ses puissances une homologie *d'ordre 2*, representée par

$$R = \left| \begin{aligned} x'_1 &= -x_1 \\ x'_2 &= -x_2 \\ x'_3 &= x_3 . \end{aligned} \right.$$

On aura donc dans le groupe G deux homologies, centre O et axe $O_1 O_2$, dont l'une, σ, est d'ordre 5, et l'autre d'ordre 2 (nombre premier avec 5); mais alors on aura aussi, centre O, une homologie *d'ordre 10,* appartenant à G. Cela suffit, comme on l'a vu dans le n. 1, pour faire rentrer G dans la classification A), B).

3. Il nous reste à démontrer que *si l'un de nos groupes est doué d'homologies d'ordre 4 il rentre aussi dans* A), B).

Appelons G le groupe dont il s'agit, et supposons qu'il contient une homologie σ_1 de centre O_1 et d'ordre 4. Mettons nous dans l'hypothèse que les points O_1, O_2, X_1, X_2 soient distincts, sans quoi nous serons dans les cas déjà traités. Sur la droite

$O_1 O_2$ nous trouvons un groupe γ contenant deux homographies d'ordre 4 à pôles distincts; le groupe γ sera donc le groupe de l'octaèdre, et alors l'on aura sur la droite $O_1 O_2$ un troisième couple de pôles O_3, X_3 analogues à ceux déjà considerés.

Soit toujours O la rencontre des axes de σ_1, σ_2. Disposant en O_1, X_1, O les trois sommets du triangle de référence, nous representerons l'homologie σ_1 par

$$S_4 = \left| \begin{array}{l} x'_1 = -x_1 \\ x'_2 = \quad ix_2 \\ x'_3 = \quad ix_3, \end{array} \right.$$

où l'on appelle i l'unité imaginaire, qui est l'une des racines $4^{\text{èmes}}$ de l'unité (il est à remarquer que les nombres 3, 4 sont premiers entre eux).

Mais dans le groupe de l'octaèdre on a des homographies (d'ordre 2) qui permutent les pôles des homographies d'ordre 4, par conséquent nous trouverons dans G cette autre homologie

$$T_4 = \left| \begin{array}{l} x'_1 = \quad ix_1 \\ x'_2 = - \; x_2 \\ x'_3 = \quad ix_3. \end{array} \right.$$

Le produit

$$S_4 T_4 = \left| \begin{array}{l} x'_1 = -ix_1 \\ x'_2 = -ix_2 \\ x'_3 = - \; x_3 \end{array} \right.$$

représente une homologie, de centre O et d'axe $O_1 O_2$, d'ordre 4, appartenant à G.

Or, si tous les transformés de O_1 sont sur la droite $O_1 O_2$, alors cette droite restera fixe, et le groupe G appartiendra à la classe A). Si cela n'arrive pas, nous trouverons un transformé O'_1 hors de la droite $O_1 O_2$; il sera divers de O, car il n'est pas possible que les six points $O_1, X_1, O_2, X_2, O_3, X_3$ tombent tous en O quand la droite se déplace.

Mais alors nous trouvons sur la droite OO'_1 deux homographies d'ordre 4 à pôles distincts; donc nous trouverons sur cette droite un groupe octaédrique γ'; et nous voyons que le point de rencontre des deux droites $O_1 O_2$, OO'_1 est le centre

d'une homologie d'ordre 4, appartenant au groupe G. Ce point est donc un transformé de O_1 tombant sur la droite $O_1 O_2$; il est alors l'un des six points $O_1, X_1, O_2, X_2, O_3, X_3$. Où pourra-t-il donc se trouver un transformé de O_1? il pourra se trouver seulement sur les six droites qui joignent O avec les six points $O_1, X_1, O_2, X_2, O_3, X_3$. Mais sur ces six droites on a effectivement six groupes octaèdriques, car ces six points sont *transitivement* permutables, donc le point O_1 devra se placer en 31 positions, c'est-à-dire en O, et encore en cinq positions sur chacune des six droites.

Fixons maintenant notre attention sur l'irrationalité qui peut se présenter dans les coefficients de la plus générale entre les substitutions qui expriment les homographies du groupe G.

Les deux homographies d'ordre 4, qui sur la droite O_1, X_1 ont ces points pour pôles, donnent origine au groupe de l'octaèdre. La première correspond en G á une homographie exprimée par S_4. Pour trouver l'expression de la substitution qui correspond à l'autre, nous écrirons S_4 dans un système qui aie $OO_2 X_2$ pour triangle de référence, et ensuite nous passerons au triangle $OO_1 X_1$. On sait que les quatre points $O_1 X_1 O_2 X_2$ sont harmoniques, donc nous pouvons retenir que, en référence au triangle $OO_1 X_1$, le point O_2 est donné par (0, 1, 0), et le point X_2 par (0, 0, 1); donc les formules de transformation seront

$$S = \left| \begin{array}{l} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_1 - x_2 \\ x'_3 = x_3. \end{array} \right.$$

Donc nous pouvons écrire les expressions de toutes les homographies du groupe Γ, correspondant dans G au groupe octaèdrique γ, en restant dans le champ de rationalité $(1, i)$; et il en sera de même pour les autres groupes, analogues à Γ, correspondant aux autres groupes octaédriques considerés.

Mais, combinant toutes ces homographies, nous aurons le groupe G, donc la plus générale entre les substitutions qui expriment les homographies de G sera

$$U = \left| \begin{array}{l} x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_2 \\ x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3, \end{array} \right.$$

dont les coefficients seront dans le champ de rationalité $(1, i)$.

Réduisont U à sa forme canonique: les coefficients seront donnés par les racines de l'équation en ρ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

On en tire que les coefficients de la plus générale entre les substitutions qui expriment les homographies de G seront donnés par les racines d'une équation

$$z^3 + \omega_1 z^2 + \omega_2 z + 1 = 0,$$

où les nombres ω_1, ω_2 sont rationnels en $1, i$. Portant dans le second membre l'imaginaire et élevant au carré, nous voyons qu'il suffit résoudre une équation *rationnelle de degré 6* pour trouver ces coefficients.

Mais nous avons vu que O_1 a 31 positions, donc il y a dans G une homographie dont la 31ème puissance est l'unité. Les coefficients de sa substitution, réduite à la forme canonique, sont du type η, ou l'on pose $\eta^{31} = 1$. Pour les déterminer il faut donc résoudre l'équation *irréductible du 30ème degré*

$$\sum_{\nu=0}^{30} z^\nu = 0;$$

et alors il ne suffit pas une équation du degré 6.

Cela nous montre que l'on tombe dans l'absurde s'il fait des hypotheses qui ne font pas rentrer G dans la classification A), B).

L'étude des groupes doués d'homologies d'orde $n < 4$ conduit aux brillants résultats de Jordan, de Valentiner et de Klein; mais tout cela reste bien au dehors de ce modeste travail, qui a, comme nous l'avons déjà dit, le seul but d'exposer simplement la partie moins difficile de la classification.

SUR QUELQUES FORMULES CONCERNANT LES FORMES QUADRATIQUES BINAIRES D'UN DISCRIMINANT NÉGATIF

PAR

M. Lerch

à Brunn (Moravie)

Les formes quadratiques binaires

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

du même discriminant négatif $b^2 - 4ac = -\Delta$ se distribuent en un nombre fini de classes, que je désigne par K. En supposant le discriminant fondamental c'est-à-dire tel qu'il ne lui correspond que des formes primitives, on a la formule suivante [1]

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right) = -\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right] \mathrm{K},$$

m désignant un entier positif arbitraire et $\left(\frac{-\Delta}{m}\right)$ signifiant le signe de Legendre dans la façon de Kronecker.

Le cas de $\Delta = 3$ et $\Delta = 4$ font toutefois l'exception et il faut prendre respectivement $\mathrm{K} = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{K} = \frac{1}{2}$. Mais, comme nous pouvons supposer $\Delta > 4$, ces exceptions n'ont pas besoin de nous préoccuper.

Cela posé, retenons dans le premier membre les termes

---

[1] *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 2e série, T. 21 (1897).

$\alpha = 1, 2, \ldots \left[\frac{\Delta - 1}{2}\right]$, et posons $\alpha = \Delta - \alpha'$ dans les termes suivants; comme

$$\left(\frac{-\Delta}{\Delta - \alpha}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\Delta - \alpha}{\Delta} m\right) = \mathrm{E}\left(m - \frac{\alpha m}{\Delta}\right) = m - 1 - \mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)$$

le premier membre devient

$$2 \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right) - (m-1) \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

et, en substituant la valeur connue

$$(2) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = (2 - \varepsilon) \mathrm{K}, \quad \varepsilon = \left(\frac{2}{\Delta}\right),$$

il vient

$$(3) \quad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right) = \left[(m-1) - \frac{1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2} - \frac{1 - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)}{2}\right] \mathrm{K}.$$

Je ferais usage de cette formule pour évaluer l'expression

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) i_\alpha,$$

où l'on pose pour abréger

$$(4) \qquad i_\alpha = \sum_{m=1}^{n} \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{2m\alpha}{\Delta}\right) - 2\,\mathrm{E}\left(\frac{m\alpha}{\Delta}\right) \right\},$$

n signifiant $\left[\frac{\Delta - 1}{2}\right]$; le symbole i_α indique évidemment combien parmi les quantités

$$\frac{2\alpha}{\Delta}, \quad \frac{4\alpha}{\Delta}, \quad \frac{6\alpha}{\Delta}, \quad \ldots \quad \frac{2n\alpha}{\Delta}$$

ont leur partie entière impaire.

On a en effet d'après (3) et (2)

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\sum_{m=1}^{n}\mathrm{E}\left(\frac{2\,\alpha m}{\Delta}\right)=\left[n^2\,\frac{1-\varepsilon}{2}-\frac{n}{2}+\frac{\varepsilon}{2}(2-\varepsilon)\,\mathrm{K}\right]\mathrm{K},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\sum_{m=1}^{n}\mathrm{E}\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)=\left[\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{1-\varepsilon}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}(2-\varepsilon)\,\mathrm{K}\right]\mathrm{K}.$$

En retranchant le double de la deuxième expression de la première, il vient

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)i_\alpha=\left[n\,\frac{1-\varepsilon}{2}+\frac{n}{2}+\frac{\varepsilon-2}{2}\,(2-\varepsilon)\,\mathrm{K}\right]\mathrm{K}.$$

Ce résultat prend une forme particulièrement simple si l'on fait usage de l'écriture

$$h=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{K}=(2-\varepsilon)\,\mathrm{K}, \tag{5}$$

à savoir

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)i_\alpha=\frac{(n-h)\,h}{2}; \tag{6}$$

les hypothèses sont que $-\Delta$ soit un discriminant fondadamental, $n=\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]$, les i étant définis par (4).

Lorsque Δ est impar, h signifie le nombre de classes envisagé dans la théorie de Gauss et de Derichlet où il s'agit des formes telles que

$$ax^2+2bxy+cy^2,$$

l'expression $b^2-ac=-\Delta$ étant alors le déterminant de la forme.

Ainsi pour $\Delta=15$ on a $h=2$, $n=7$, et

$$\frac{(n-h)\,h}{2}=5;$$

et en effet ici est

$$i_1=0,\quad i_2=4,\quad i_4=4,\quad i_7=3$$

$$\sum_{1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)i_\alpha=4+4-3=5.$$

Les nombres impaires P de la forme $4k+1$ n'ont pas la forme de Δ et l'on fait dans notre théorie, qui est celle de Kronecker, $\Delta = 4P$, P devant être un produit de nombres premiers différents, pourvu que $-4P$ soit un discriminant fondamental.

Comme

$$\left(\frac{-4P}{2\nu}\right) = 0,$$

on peut se borner aux valeurs impaires de α et pour celles-ci

$$\left(\frac{-4P}{\alpha}\right) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right),$$

puis $n = 2P - 1$.

Les formes $ax^2 + 2bxy + cy^2$ de déterminant $-P = b^2 - ac$ ont pour discriminant $4b^2 - 4ac$ c'est-à-dire $-4P = -\Delta$, le nombre de classes est exactement

$$K = \frac{h}{2}.$$

Comme

$$i_\alpha = \sum_{m=1}^{2P-1} \left\{ E\left(\frac{m\alpha}{2P}\right) - 2E\left(\frac{m\alpha}{4P}\right) \right\} = i'_\alpha,$$

il s'ensuit

$$\sum_\alpha (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right) i'_\alpha = K(2P-1-2K), \tag{7}$$

$$\alpha = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ 2P-1.$$

Le nombre $K = Cl(-4P)$ est donné par exemple par la formule

$$\sum_\alpha (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right) = 2K, \quad (\alpha = 1,\ 3,\ \ldots\ 2P-1).$$

Posons par exemple $P = 5$, on trouve

$$i'_1 = 0, \quad i'_3 = 3, \quad i'_7 = 3, \quad i'_9 = 4$$

$$-\left(\frac{3}{5}\right)3 - \left(\frac{7}{5}\right)3 + \left(\frac{9}{5}\right)4 = 3 + 3 + 4 = 10$$

et comme $K = 2$, on a en effet

$$K(2P-1-2K) = 2(9-4) = 10,$$

Le cas où Δ est un nombre premier de la forme $4k+3$ parait toutefois le plus fécond ; car ici en vertu du théorème élémentaire bien connu

$$\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)=(-1)^{\sum_m\left[\frac{2m\alpha}{\Delta}\right]}\left(m=1,\ 2,\ \ldots\ n\ ;\ n=\frac{\Delta-1}{2}\right)$$

le signe

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)$$

a pour valeur $(-1)^{i_\alpha}$ et il s'ensuit

$$(6^{\circ}) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{i_\alpha}\, i_\alpha=\frac{(n-h)h}{2}, \quad n=\frac{\Delta-1}{2}.$$

La somme des i_α pairs surpasse donc toujours celle des i_α impairs, la différence étant

$$\frac{n-h}{2}h,$$

pourvu que Δ soit un nombre premier de la forme $4k+3$.

En vertu de (2) et (5), le nombre

$$h=\sum_{1}^{n}(-1)^{i_\alpha}$$

est précisement l'excès des i_α pairs sur les i_α impairs ; la différence des sommes se présente comme fonction quadratique de l'excès.

PROPRIÉTÉS DES TANGENTES COMMUNES A DEUX QUADRIQUES HOMOFOCALES

PAR

M. C. SERVAIS

Professeur à l'Université de Gand

---

1. Soient s une tangente commune à deux quadriques homofocales Σ_1, Σ_2; M_1, M_2 les points de contact; n_1, n_2 les normales correspondantes; m_1, m_2, les tangentes conjuguées de s relativement à Σ_1, Σ_2. Une courbe tracée sur la surface Σ_1 et tangente en M_1 à la droite m_1, est la directrice d'une normalie (n_1); le point $A_1 \equiv (n_1 m_2)$ est le point central de la génératrice n_1 de cette normalie; ce point est aussi le pôle du plan (sm_1) relativement à la quadrique Σ_2 (*Mathesis*, 1907, p. 115). Le point $A_2 \equiv (n_2 m_1)$ a une interprétation analogue à celle du point A_1; on intervertit les rôles des surfaces Σ_1 et Σ_2.

2. Soient (ab) un plan de symétrie des quadriques Σ_1, Σ_2; N_1, N_2 les traces des normales n_1, n_2 sur ce plan; M'_1, A'_1, N'_1 les projections orthogonales de M_1, A_1, N_1 sur l'axe de symétrie a, T le point de rencontre du plan (sm_1) avec cet axe. Les points M_1, A_1, N_1 sont les pôles du plan (sm_1) relativement aux quadriques Σ_1, Σ_2 et à la conique focale (ab); par suite les plans projetant les points M_1, A_1, N_1 normalement à l'axe a sont les plans polaires du point T par rapport à Σ_1, Σ_2, et la conique focale (ab).

Dans le cas d'une quadrique à centre O on a

$$OM'_1 . OT = P_{a_1}; \quad OA'_1 . OT = P_{a_2}; \quad ON'_1 . OT = P_{a_1} - P_{c_1}$$

P_{a_1}, P_{a_2} désignent les puissances des involutions de points con-

jugués sur l'axe a relativement à Σ_1, Σ_2 ; P_{c_1} celle de l'involution analogue sur l'axe c de la quadrique Σ_1. On déduit de ces égalités

$$OT \,.\, M'_1A'_1 = P_{a_2} - P_{a_1} ; \quad OT \,.\, M'_1N'_1 = - P_{c_1}$$

$$M'_1A'_1 : M'_1N'_1 = (P_{a_1} - P_{a_2}) : P_{c_1}$$

par conséquent

$$M_1A_1 : M_1N_1 = (P_{a_1} - P_{a_2}) : P_{c_1} .$$

Dans le cas d'un paraboloïde Σ_1 on a

$$M'_1T = 2\, S_1T ; \quad A'_1T = 2\, S_2T ; \quad N'_1T = 2\, F_2T$$

S_1, S_2 sont les sommets des paraboloïdes Σ_1, Σ_2 ; F_2 est le foyer commun à leurs sections principales dans le plan de symétrie (ac). On déduit de ces égalités

$$M'_1A'_1 = 2\, S_1S_2 ; \quad M'_1N'_1 = 2\, S_1F_2 ; \quad M'_1A'_1 : M'_1N'_1 = S_1S_2 : S_1F_2$$

par conséquent

$$M_1A_1 : M_1N_1 = S_1S_2 : S_1F_2 .$$

3. Si la quadrique Σ_1 a un centre O, on désigne par O_1 la projection de ce point sur le plan tangent (sm_1) et par δ_1 le segment O_1O compté dans le sens de la semi-droite M_1N_1 : on a en grandeur et en signe

$$M_1N_1 \,.\, \delta = P_{c_1}$$

par suite

$$M_1A_1 \,.\, \delta_1 = P_{a_1} - P_{a_2}$$

4. On a de même pour la quadrique Σ_2

$$M_2A_2 \,.\, \delta_2 = P_{a_2} - P_{a_1}$$

donc

$$M_1A_1 \,.\, \delta_1 + M_2A_2 \,.\, \delta_2 = 0 .$$

5. Le point A_1 étant le pôle du plan (sm_1) relativement à la quadrique Σ_2, les plans tangents à cette surface parallèles au plan (sm_1) coupent la normale n_1 à Σ_1 en deux points V_1, W_1 tels que

$$(A_1M_1V_1W_1) = - 1 .$$

Par suite

$$\frac{2}{M_1A_1} = \frac{1}{M_1V_1} + \frac{1}{M_1W_1} = \frac{2\,M_1U_1}{M_1V_1\,.\,M_1W_1}$$

U_1 étant le milieu du segment V_1W_1. Ce point U_1 est dans le plan diamétral parallèle au plan (sm_1) et on a en grandeur et en signe

$$M_1U_1 = \delta_1$$

donc

$$M_1A_1\,.\,\delta_1 = M_1V_1\,.\,M_1W_1\,.$$

6. Les plans tangents à la quadrique Σ_1 parallèles au plan (sm_2) coupent la normale n_2 à Σ_2 aux points V_2, W_2, on a (5)

$$M_2A_2\,.\,\delta_2 = M_2V_2\,.\,M_2W_2$$

donc (4)

$$M_1V_1\,.\,M_1W_1 + M_2V_2\,.\,M_2W_2 = 0\,.$$

7. Dans le cas d'un paraboloïde Σ_1 le point F_2 (notations du n.° 2) est le sommet de la parabole focale (ab). Le point N_1 étant le pôle du plan (sm_1) par rapport à la parabole focale (ab), on a

$$TF_2 = F_2N'_1 = F_2M'_1 + M'_1N'_1$$

ou

$$M'_1N'_1 = TF_2 + M'_1F_2\,.$$

Mais

$$S_1M'_1 = TS_1$$

par conséquent

$$M'_1N'_1 = 2\,S_1F_2\,.$$

On a aussi

$$M'_1A'_1 : M'_1N'_1 = M_1A_1 : M_1N_1 = S_1S_2 : S_1F_2$$

donc

$$M'_1A'_1 = 2\,S_1S_2\,.$$

8. Si A'_2 et M'_2 sont les projections des points A_2 et M_2 sur l'axe de symétrie *a* on a

$$M'_2A'_2 = 2\,S_2S_1$$

par conséquent

$$M'_1A'_1 + M'_2A'_2 = 0\,.$$

9. Dans le cas d'une quadrique Σ_1 à centre O, on déduit

des égalités

$$OA'_1 . OT = P_{a_2} \quad OM'_1 . OT = P_{a_1}$$

et de leurs analogues

$$OA'_2 . OT' = P_{a_1} \quad OM'_2 . OT' = P_{a_2}$$

$$OM'_1 . OM'_2 = OA'_1 . OA'_2 .$$

10. Dans les polarités relatives à Σ_1 et Σ_2, à un espace (E) correspondent respectivement deux espaces (E_1) et (E_2); ces espaces sont rapportés projectivement, deux points homologues sont les pôles d'un même plan par rapport à Σ_1 et Σ_2. En considérant les plans (sm_1) et (sm_2) on a les couples de points correspondants M_1 et A_1, A_2 et M_2.

Dans le cas des quadriques à centre, ce point O et les points à l'infini A, B, C sur les axes de symétrie sont les points doubles des espaces projectifs (E_1) et (E_2). On a

$$OA\,(M_1A_2CD) \barwedge OA\,(A_1M_2CD) \barwedge OA\,(M_2A_1DC)$$

par suite *d'une arète du tétraèdre formé par les plans de symétrie et le plan de l'infini, on projette les couples de points* M_1 *et* M_2, A_1 *et* A_2 *et les sommets du tétraèdre situés sur l'arète opposée suivant trois couples de plans conjugués dans une involution.*

En particulier si on projette de l'arète CD et si on coupe par l'axe de symétrie OA l'involution obtenue, on a l'involution ($M'_1M'_2$, $A'_1A'_2$, OA); par suite

$$OM'_1 . OM'_2 = OA'_1 . OA'_2$$

égalité déjà obtenue (9).

Si la surface Σ_1 est un paraboloïde, deux points doubles A et O des espaces projectifs (E_1) et (E_2) coïncident à l'infini sur l'axe de symétrie a; les deux autres B et C sont à l'infini dans des directions normales aux plans de symétrie (ab) et (ac). On a les involutions

$$a\,(M_1M_2,\ A_1A_2,\ BC), \quad BC\,(M_1M_2,\ A_1A_2,\ AA), \quad AC\,(M_1M_2,\ A_1A_2,\ Ba).$$

La seconde coupée par l'axe a donne l'involution

$$(M'_1M'_2,\ A'_1A'_2,\ AA)$$

par suite

$$M'_1A'_1 = A'_2M'_2$$

égalité déjá obtenue (8).

11. On considère la famille de géodésiques de Σ_1 dont les plans osculateurs sont tous tangents à la quadrique Σ_2 homofocale à Σ_1. Les courbes (G) conjuguées de ces lignes géodésiques jouissent des propriétés suivantes:

Toute courbe (G) *est la directrice d'une normalie de* Σ_1; *si* M_1 *désigne un point de* (G), N_1 *la trace de la normale en* M_1 *sur un plan de symétrie de* Σ_1, A_1 *le point central de la normalie relatif à la génératrice* M_1N_1, *le rapport* $M_1A_1 : M_1N_1$ *est constant pour toutes les courbes* (G) (2).

Les lignes de striction de ces normalies sont situées sur une même surface du second degré, polaire réciproque de Σ_1 *relativement à* Σ_2 (1).

Si la quadrique Σ_1 *est un paraboloïde, la projection du segment* M_1A_1 *sur l'axe de symétrie de la surface est constante le long des courbes* (G) (7).

SUR L'HISTOIRE DU CALCUL INFINITÉSIMAL ENTRE LES ANNÉES 1620 ET 1660

PAR

A. Aubry

L'époque de l'invention du calcul de l'infini intéressera toujours à bon droit ceux qui aiment à revivre l'histoire des progrès de l'esprit humain. Malgré tout ce qui a été dit sur cette brillante période, il s'en faut qu'on en ait tout dit.

Un des principaux objectifs de l'historien des mathématiques est de montrer l'enchaînement des découvertes, en mettant en relief l'influence qu'elles ont eue les unes sur les autres. Or ce but est ici particulièrement difficile à atteindre: aussi, le plus souvent, — se basant sur l'important commerce épistolaire qui existait alors entre les savants, — on s'est attaché à relater à leurs dates des travaux consignés dans des livres parus beaucoup plus tard, bien que, — par suite de cette tardive publication, — un petit nombre seulement en ait réellement profité. — Veut-on, au contraire, — comme nous l'avons fait dans notre *Essai sur l'hist des c.* (t. IV, p. 65), où se trouvent traités incidemment quelques points de l'histoire du calcul infinitésimal, — s'astreindre à citer les découvertes dans l'ordre chronologique de leur divulgation imprimée? Cette manière de procéder prête également à la critique: car il ne suit pas nécessairement de la publication d'une découverte, que celle-ci ait été immédiatement connue et appréciée, même du public restreint que constituaient les savants d'alors, et qu'elle ait par suite influé sur les suivantes; et il est certain qu'au contraire la correspondance des savants a, presque autant que leurs ouvrages, contribué au progrès de la science.

C'est pourquoi un recueil aussi complet que possible de do-

cuments relatifs à cette partie de l'histoire des sciences exactes serait d'une haute importance; il y aurait lieu surtout de rechercher les pièces peu connues aujourd'hui, soit parce qu'elles se trouvent comme noyées dans des ouvrages paraissant étrangers aux mathématiques, ou écrites d'une manière embrouillée qui a rebuté les lecteurs, ou dus à des auteurs à tort ou à raison disqualifiés.

La présente note a pour but d'apporter une petite contribution à la creation d'un tel recueil.

Sur le *Tiphys batavus*, de Snellius (Leyde, 1624). (1)

Cet ouvrage, destiné à fournir des méthodes de calcul pour les tables loxodromiques, ne paraît pas avoir attiré l'attention des historiens du calcul infinitésimal; et cependant son importance à ce point de vue est indéniable: le *triangle différentiel* formé des *différentielles* de l'abscisse, de l'ordonnée et de l'arc, s'y trouve nettement indiqué, ainsi que les premières vues sur la rectification des courbes. Voici du reste un extrait de ce livre, qui paraît avoir amené la découverte de la rectification de la spirale logarithmique, trouvée virtuellement par Descartes, et, d'une manière consciente, par Torricelli, puis par Wallis, qui l'a publiée le premier.

«Prop. XVII. *Loxodromia est instar basis trianguli plani rectanguli ad sphæræ surperficiem applicati, cujus crus unum sit distantia parallelorum inter quos intercipitur.*

Inclinatio anguli quem navium carina cum meridiano comprehendit, postquam à perpendiculo demutat, varia omninò esse potest, et ideo loxodromiæ helices infinitæ, alium atque alium cum meridianis angulum comprehendentes. Angulum autem recto minorem hic inclinationis angulum vocamus. Cum autem singularum una eademque sit ad omnes meridianos inclinatio, et per singula puncta, etiam vicinissima, paralleli circuli meridiano perpendiculares cogitatione traduci possint, vides hic triangulum efformari rectangulum. In partes porrò minutissimas et meridianus et loxodromia concidi possunt, ut vix ullo calculo eorum à rectis lineis differentia exprimi aut deprehendi queat; atque hæ particulæ in alias minores millesimas. Et quamvis

(1) P. 71 (t. iv) de notre *Essai*, l. 18, au lieu de «quadrature», lire «rectification».

rectæ et curvæ differentia hoc sectionum minutali haud possit tolli, neque unquam quantulacunque curvæ lineæ pars recta sit, tamen ad sensun et usum omninò evanescit; hoc igitur minimum, quod hic concipimus, loxodromiæ segmentum, fiet anguli recti basis; segmentum autem meridiani crus unum. Ad istam planè formulam, quemadmodum accidit triangulo rectangulo, cujus crus unum cylindri peripheriæ æquale sit, si alterum lateri cylindri recti applicetur, hoc autem circà cylindrum inflectatur, tum basis trianguli helicem cylindraceam in ejus superficie designabit. Quod PAPPUS prop, 24, l. 8, diserte docet; ut illa helix nostræ helici loxodromicæ, et illud crus trianguli lateri congruens, vel quod idem sit, axi parallelum, meridiani segmento hic respondeat: quamvis illius designatio et explicatio non paulò sit facilior quam hujus nostræ; quod circuli paralleli illic sint æquales: hic autem longè secùs sit. Intelligamus itaque in loxodromià *eiou* segmenta meridianorum *ji*, *vo*, *uf*, esse æqualia, et angulos *eij*, *iov*, *ouf* æquales *ej*, *iv*, *of* parallelorum circulorum segmenta non quidem similia, sed æqualia tantùm. Hìc basis trianguli totius esset *eiou*; crus porrò reliquum *ux*, è segmentis *ij*, *ov*, *uf*, compositum intelligatur.

Prop. XVIII. *Ejusdem loxodromiæ segmenta inter parallelos circulos æquali intervallo disjunctos intercepta sunt æqualia.*»

Ainsi SNELLIUS se propose de démontrer qu'*un arc de loxodromie est comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle plan appliqué sur la surface de la sphère, et dont un côté est égal à la distance des deux parallèles entre lesquels il est contenu.* Pour cela il imagine des méridiens et des parallèles coupant la courbe en des points très voisins qui la divisent par exemple en plus de mille parties égales; ces portions d'arcs circulaires et loxodromiques diffèrent de leurs cordes aussi peu que possible, et forment une suite de triangles rectangles non seulement semblables mais égaux, dont les côtés peuvent être considérés comme les éléments du triangle rectangle ayant pour côtés l'arc donné de la loxodromie et ceux du méridien et du parallèle qui sous-tendent ce même arc.

Sur les *Cogitata physico-mathematica*, de MERSENNE (Paris, 1644).

On sait que c'est ROBERVAL qui, le premier, a eu l'idée de la comparaison des arcs de la parabole et de la spirale, comparaison justifiée depuis par PASCAL et réduite à son principe par GREGORY.

Cette découverte a été rapportée par Mersenne, dans son ouvrage, et elle est, semble-t-il, de nature à justifier la mention qui va en être faite.

«De parabola helici Archimedæ æquali. Cum hæc agerem, vir doctus lineam aliquam rectam proposuit, quam primæ revolutioni *a b c d e f n* helicis æqualem credebat, quam tamen revolutionem linea recta proposita maiorem, eamque parabolæ GT æqualem Geometra noster ([1]) demonstravit.

Ut autem parabola reperiatur æqualis prædictæ helici, GS axis parabolæ æqualis intelligatur semi-circumferentiæ N*gn*, cuius semi-diameter *ag*, cui ordinata ST sit æqualis parabola inter G et T intercepta helicis primæ revolutioni æqualis erit: si verò tangens MG dividatur in quotuis partes parti GQ, sive ST, sive *ag* æquales, verbi gratia in QN, NR, & RM, producaturque parabola GT, donec ei applicetur ordinata GN verbi causa in X, tunc parabola GX æqualis erit duabus primis revolutionibus helicis.

Denique si producatur semper donec ei applicentur ordinatæ GR, GM, etc. æqualis erit tribus, aut 4 primis helices revolutionibus, et sic in infinitum.

«Quod ut clarius ex parabolæ, & helices generatione intelligatur, notandum duplicem esse motum puncti helicem describentis, unus æquabilis est secundum rectam lineam, alter secundum circumferentiam inæqualis, quippe perpetuo crescit; cuius velocitas si sumatur, verbi gratia, in puncto *n*, deinceps que nec augeatur, neque minuatur, circulum descriptura sit, cuius semi diameter *an*, idemque fiet in alijs punctis helices in recta *an* producta sumptis, quæ cum dupla erit *na*, dupla enim erit motus velocitas, quæ circumferentiam præcedentis duplam describet, & ita de reliquis in infinitum.

«Punctum etiam quod describit parabolam, fertur duobus motibus, primò æquabili secundum rectam GQN, &c. Secundo iuxta rectas GV, & alias ei parallelas à punctis Q, N, R, M, in VI rectam perpendiculares, sed inæquabili, hac lege vt si punctum illud sumatur in T, velocitas illius tanta sit quanta requiritur vt quo tempore percurrit rectam GS, vel QT æquabili motu, eodem tempore percurrere possit duplam ipsius GS, putà SV, si velocitas non mutetur.

«Sed alio motu pertrasiit GQ eodem tempore, igitur pun-

([1]) Dans les errata il donne le *monita* qui voici: «Me quoties Geometram nostrum in istis tractatibus appellaui, Cl. V. Roberuallium intellexisse, quem in singulis mathematicæ partibus noui versatissimum».

ctum *a* in helice percurrit *ag*, vel *an* motu æquabili, eodem punctum G percurrit GQ motu æquabili, & eodem tempore punctum *a* in linea *na* existens secundo motu percurreret circumferentiam circuli primæ revolutionis, cuius *an* semidiameter. Punctum autem G in T secundo motu iuxta directionem QT pertrasiret duplam SG prædictæ circumferentiæ æqualem, cum GS statuatur semicircumferentiæ æqualis, sunt igitur utriusque duo illi motus æquales in omnibus sui cursus instantibus, & componuntur secundum æquales angulos, nempe rectos, lineas igitur æquales describunt, vnus quidem helicem, alter parabolam; idemque demonstratur de cæteris reuolutionibus. Hoc autem problema facilè redditur ex hypothesi quadratura circuli, cum enim ARCHIMEDES demonstravit circulum helici æquale, & parabolæ quadratura, statim atque supponitur quadratu æquale circulo, nil inuentu facilius quàm parabola helici æqualis.»

Comme on vient de le voir, ROBERVAL considère la parabole GX et la spirale *aen* produites par le mouvement de deux points se mouvant : l'un uniformément sur le rayon *ag* tournant uniformément au tour du point fixe *a* ; — l'autre uniformément sur la droite GN, qui se meut elle-même parallèlement avec une vitesse telle qu'elle arrive en VI dans le double du temps qu'elle met à parvenir en ST. Si GV est le quadruple de GS ; — le paramètre GS de la parabole étant égal à la demi-circonférence de rayon *an*, et ces deux lignes étant parcourues dans le même temps.

Les vitesses sur GQ et sur *an* étant égales, celles des deux points mobiles dépendent donc seulement, l'un de la vitesse de la droite GQ parallèlement à elle-même, et l'autre de la longueur même du vecteur; elles sont par suite égales, et de plus elles font des angles égaux avec les droites mobiles : les arcs décrits sont donc égaux.

ROBERVAL, au lieu de considérer la direction de la tangente et les différentielles de l'abscisse, de l'ordonnée, du vecteur et des arcs, compare les vitesses avec lesquelles ces éléments seraient décrits, ce qui revient évidemment au même mais paraît plus clair et plus exact, parce que, — comme l'a fait remarquer LAGRANGE, — l'idée de vitesse semble au premier abord une notion simple.

Toutefois, bien qu'il signale la possibilité d'une démonstration rigoureuse, on a pu se demander s'il était lui-même bien sûr de ses déductions ; c'est du reste ce qui a amené PASCAL à établir sa propre démonstration à la manière des Anciens, pour la rendre inattaquable.

On verra du reste que le raisonnement de ROBERVAL revient

à la considération des trois relations

$$x^2 = y, \quad 2\rho = \omega, \quad x = \rho,$$

d'où on tire:

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

Le livre de MERSENNE contient également la méthode des tangentes dite de ROBERVAL, qu'on ne cite guère que d'après ses œuvres posthumes, publiées en 1693. TORRICELLI en a donné une semblable presque en même temps, dans ses *Op. geom.;* mais l'antériorité des droits de ROBERVAL paraît indiscutable: on renverra aux extraits incomplets donnés par JACOLI, en 1875, dans le B. BON.

Sur la *Quadratura circuli,* de LALOUVÈRE (Toulouse, 1651). (1)

Ce géomètre, connu seulement aujourd'hui par les injustes attaques qu'il eut à subir de PASCAL, mériterait d'être lu. Sans doute, il est plus érudit que mathématicien et on ne saurait trop lui reprocher sa fatigante prolixité; mais on ne peut lui dénier la mise au jour de quelques idées et de généralisations d'autant plus remarquables qu'elles n'étaient pas dans le ton de l'époque. Sa *Quad. circ.,* de beaucoup préférable à son *De cycloïde,* est le premier essai imprimé qu'on ait eu de géométrie infinitésimale; et à ce titre, il demanderait un extrait étendu: toutefois l'analyse qui va suivre pourra en donner une idée suffisante.

L'auteur étudie plus généralement qu'on ne l'avait fait jusque là, les rapports des centres de gravité des surfaces et de leur quadrature.

Il compare les quadratures et les tangentes d'une courbe et de sa transformée par affinité ($y_1 = ky$) ou par rotation de l'ordonnée tournant d'un angle donné autour de son pied, ou encore par ces deux moyens combinés.

G. DE S.T VINCENT, dont il ne connaissait pas du reste l'*Op. geom.,* avait montré à la manière d'EUCLIDE (l. XII, 2), qu'un diamètre partage en deux parties égales un segment de conique; en retirant de chaque demi segment le triangle maximum qui peut y être inscrit, puis partageant ces demi-segments en quatre

(1) Cette note serait à intercaler entre les lignes 8 et 9, p. 75 de notre *Essai* déjà cité (t. IV).

segments égaux les quatre triangles maximum qui peuvent y être inscrits, et ainsi de suite. LALOUVÈRE démontre cette proposition, comme on le ferait élémentairement aujourd'hui, en partageant le segment par des parallèles à la tangente, lesquelles parallèles sont coupées en leurs milieux par le diamètre.

Il étudie différentes lunules coniques.

ARCHIMÈDE avait obtenu la quadrature de la parabole en la suspendant à un bras d'une balance par une de ses ordonnées et l'équilibrant par une certaine surface attachée à l'autre bras. LALOUVÈRE étend cette considération à une courbe quelconque : la distance a du centre de gravité de cette courbe se détermine par un calcul qu'on représenterait aujourd'hui par la relation

$$a \int y dx = \int xy dx,$$

de sorte que la transformée $X = x$, $Y = xy$ définie par sa quadrature $\int Y dX$, donne la relation de la quadrature de la courbe proposée et de son centre de gravité: il appelle cette transformée la *quadratix* de la première. Si la courbe donné est le cercle $y = \sqrt{1 - x^2}$, sa quadratrix est le *huit* déjà remarqué par G. DE S.T VINCENT [1]. Il remarque aussi, comme lui, que

---

[1] L'équation de cette courbe est comme on sait, $Y^2 = X^2 - X^4$.

Si la courbe proposée est le cercle $y = \sqrt{x - x^2}$, sa quadratrix est $Y = \sqrt{\frac{1 - X}{X}}$, c. à. d. une *pseudo versiera*. C'est à la demande de LALOUVÈRE que FERMAT a quarré cette courbe, et c'est de lui que parle ce dernier (*Op. varia*, p. 55), quand il dit que «Hanc vero quæstionem ab crudito Geometra nobis prositam». Il emploie même quelques lignes plus loin, l'expression *tetragonismica*, qui rappelle le sous-titre du premier ouvrage de LALOUVÈRE : d'ailleurs celui-ci le cite plusieurs fois dans le *De cycloide*, et on sait que c'est à la suite de cet ouvrage que FERMAT a publié son traité *De lin. curv. cum lin. rectis comp.* La question se pose même de savoir si ce n'est pas cette demande de LALOUVÈRE qui l'a amené à examiner les moyens de quarrer les courbes en général; toujours est-il qu'il y quarre également le huit; le traité *De Æq. loc. transm.* paraît être du reste la suit du *De lin. curv.*, et peut être FERMAT n'a publié le premier que par suite de la découverte par VAN HEURAET et NIEL, de la rectification de la semi-cubique.

Quod qu'il en soit, on voit comment LALOUVÈRE a été amené à la considération de la transformée qu'il appelle quadratix, et de là, à celle de la versiera.

RRVERVAL appelait déjà *quadratrix* la transformée

$$X = \frac{y dx}{dy}, \quad Y = y,$$

qui TORRICELLI désignait sous le nom de *linea Robervalliana*.

OZANAM et LEIBNIZ l'ont également appelèe *quadratrice*.

cette courbe est produite par l'addition des ordonnées des deux paraboles $y = \sqrt{2+x}$ et $y = \sqrt{2-x}$, ce qui lui en donne immédiatement la quadrature.

Il considère aussi le corps qu'on tire d'une courbe donnée, quand on élève, perpendiculairement à son plan, sur chacune de ses ordonnées comme côté, un parallèlogramme semblable à un parallèlogramme donné.

Il a signalé la relation du volume, $\int \frac{kxy}{2} dx$, de l'onglet *(cuneus)* avec la surface, $\int xydx$, de la quadratrix correspondant à une même courbe; d'où le moyen d'obtenir une infinité d'onglets à volumes déterminables.

UMA LINHA FERREA NOTAVEL DO BRAZIL

POR

M. R. Miranda Junior

No anno de 1907 a estatistica dos caminhos de ferro brazileiros, comparada com a dos argentinos, provocou, da parte de publicistas facilmente impressionaveis, commentarios pouco lisongeiros para a grande Republica portuguesa da America. Provinham elles da analyse simples e cega dos numeros.

A estatistica dava, com effeito, para a Republica Argentina 21:312 kilometros e para o Brazil apenas 17:605 [1].

E, entrando em linha de conta com as superficies e população dos dois estados, parece enorme a penuria da rede ferroviaria da nação irmã de além-mar.

A superficie das terras brazileiras orça por 8.500:000 kilometros quadrados, habitados, n'aquella data, por 20.000:000 de almas, emquanto que a Argentina tem de superficie uns 2.900:000 kilometros quadrados, comprehendidos o Grão Chaco e a Patagonia, com uma população de 6.800:000 habitantes.

E, assim, servindo a linguagem mathematica dos numeros de unica derimente de primasias, deveria o Brazil possuir, para estar a par da republica platina, approximadamente o *triplo* da rede que esta ultima então possuia, ou sejam uns 64:000 kilometros!

Mas, para bem se avaliar o progresso ferro-viario brazileiro e ajuizar dos esforços envidados para o conseguir, necessario se torna attender a muitos elementos, de que os numeros não fallam, e que, todavia, são assás ponderosos.

---

[1] As ultimas estatisticas dão respectivamente para a Argentina e Brazil 25.551 e 21.777 kilometres em trafego, mantendo-se quasi a mesma differença existente em 1907.

Bem depressa se convencerá d'isso quem olhar attentamente para o mappa do solo brazileiro, e muito especialmente considerar a sua orographia.

Ao contrario do que succede na Argentina, onde quasi nove decimos do territorio são constituidos por immensas planicies, os interminaveis pampas que se alongam para o lado do Pacifico, onde não chegam por se interporem os Andes longinquos; no Brazil a terra levanta-se logo, a poucas dezenas de kilometros, contados da orla maritima, para formar os vastissimos planaltos, de 400 a 1:300 metros de altitude, que occupam todo o interior do paiz, excepção feita da depressão amazonica, ao norte, e das terras baixas do Rio Grande do Sul, que por aquella banda se ligam ás do Prata.

No seu relevo orographico destaca-se a cordilheira maritima, a famosa Serra do Mar, que limita as altas terras pelo lado do oceano, e que ao longo d'elle corre, por cerca de 18°, entre a margem do S. Francisco e as do Uruguay. Para leste d'esta enorme cordilheira desenvolve-se a extensa costa oriental do Brazil, na qual se abrem muitos portos de mar, entre os quaes se contam os principaes pela sua posição, condições especiaes de segurança, e importancia commercial. São elles: Rio de Janeiro, Santos, Bahia e, lá para o sul, os de Antonina e Paranaguá.

Da posição d'esses portos, collocados quasi na falda da serra, que os separa do interior, se deduz claramente a difficuldade extrema que havia de assaltar a engenharia brazileira, quando tratasse de estudar a ligação, por viação accelerada, d'esses portos com as terras altas, situadas para além da formidavel barreira natural, a breve trecho do littoral.

E é justamente isso que nos patenteia a historia das linhas ferreas que, n'aquellas paragens, se tem construido, desde o Atlantico, com rumo ao interior.

Bastariam essas difficuldades para desfazer, quasi por completo, as mal contidas impaciencias dos criticos.

Do fundo do seu gabinete, e de olhos fitos no papel onde escrevem, elles não podem enxergar os altaneiros montes e os profundos vales, atravéz dos quaes se teve de assentar os carris e fazer passar sobre elles a pesada locomotiva, gloria de STEPHENSON, e mãe fecunda do progresso hodierno. E a propria estatistica exuberantemente prova o cuidado que no Brazil tem merecido o problema ferro-viario.

O numero de 21:777 kilometros actualmente em trafego deixa a perder de vista os 436 kilometros construidos até 1865, e traduz de modo evidente o trabalho produzido atravéz de mil difficuldades e despezas.

Não é nosso intento demonstrar os esforços que, no seu caminhar progressivo, o Brazil tem feito a fim de se collocar a par de algumas nações mais adeantadas; mas, antes de descrevermos o caminho de ferro que expressamente visitámos, por ser um dos mais curiosos e pittorescos alli existentes, consignaremos qne, no proximo anno de 1911, a rede ferro-viaria brazileira deve contar 24:500 kilometros em trafego, numero digno de nota comparando-se com alguns dados europeus, onde enfileiram a França com 40 milhões de habitantes e 48:000 kilometros, a Allemanha com 64 milhões de habitantes e 58:000 kilometros, a Belgica com 8:000 kilometros para 7 milhões de habitantes.

Deixando agora a monotona aridez dos numeros, essencial a toda a historia economica, esbocemos o traçado do caminho de ferro que liga o porto de Paranaguá á capital do Estado do Paraná — a cidade de Curityba.

Essa linha, ha bastantes annos em trafego, não é assás conhecida ainda. Mesmo no Brazil pouca gente falla della; e, comtudo, merece bem uma visita e podemos asseverar, sem receio de sermos desmentidos, que na Europa é difficil encontrar outra que lhe leve a palma, principalmente quanto á grandiosidade da paisagem e ao arrojo e solidez das obras de arte.

E, sob este ultimo ponto de vista, é lisongeiro mencionar a gloria que da sua construcção resultou para a engenharia brazileira, que, n'uma epoca relativamente afastada, e sem os recursos de hoje, soube vencer difficuldades extraordinarias e apresentar trabalhos que a honram e enaltecem.

Inaugurada ha mais de 25 annos (a 5 de fevereiro de 1885), a estrada do Paraná é um verdadeiro padrão de gloria para os engenheiros que a construiram e nada fica a dever em solidez e belleza de traçado a outras similares da Europa, como a que liga Lucerna a Milão, atravéz do macisso do Gothardo, e a que actualmente se ultima, pelo macisso do Loetschberg, e que porá a capital da Suissa em ligação directa com a capital da Lombardia.

Cinco annos durou a construcção (1880-1885) e, para bem se avaliar das difficuldades vencidas, bastará dizer-se que a linha conta 41 pontes e viaductos e nada menos de 15 tuneis com uma extensão total de 1701,50 metros.

E todas estas obras se fizeram n'uma região onde reina a matta virgem e sulcada de cursos de agua, alguns dos quaes torrentosos, como o Ypiranga.

O caminho de ferro mede, desde Paranaguá a Curytiba, 110,386 kilometros.

E. de Ferro do Paraná

Viaducto do Presidente Carvalho. (Km. 60 + 504 ms.)

Transposto o kilometro 80, em que ella attinge a cota mais alta (955 metros acima do nivel do mar), e depois de passado o tunel mais longo, o de *Roça Nova*, com 429 metros de comprimento, a linha segue sem difficuldade até Curityba, atravéz dos largos campos do elevado planalto.

A parte mais trabalhosa da construcção começa no kilometro 42, em que termina a zona baixa e pantanosa e onde se inicia a subida dos abruptos contrafortes da vasta Serra do Mar.

Na estação de *Porto de Cima* (bem visivel na planta junto ao kilometro 50) já a cota attingida é de 283 metros, sendo o declive medio inferior a 3 % nesses poucos kilometros.

De *Porto de Cima* em deante é que o traçado, procurando vencer os obstaculos naturaes, se torce em successivas curvas e salta de encosta a encosta, ou por meio de pontes e viaductos, ou por tuneis repetidos, como se póde bem avaliar pelo exame attento da planta entre os kilometros 50 e 60 e ainda entre este e o kilometro 70, constituindo este ultimo trecho a parte mais bella e tambem a mais difficil de toda a linha.

Entre os kilometros 50 e 60 está situado o tunel de *Sanga Funda*, com 126 metros de extensão, e a *Volta Grande*, formidavel lacete, em que o traçado, obrigado pelo forte declive do terreno, volta sobre si, subindo sempre, até attingir a vertente da *Serra do Taquaral*, para onde passa pelo viaducto *Presidente Carvalho* (1), de viga cheia, com o qual se evitou um tunel de construcção difficil e que é uma obra de arte notavel, com os seus 6 vãos separados por 5 pilares gigantescos na sua altura, parecendo mais sustentar a elevada montanha a que se encostam, do que os trilhos que, em curvas apertadas de 90 a 100 metros de raio, supportam a locomotiva suspensa do abysmo, em cujo fundo corre o rio *Itupara*.

Um pouco adeante do viaducto está o tunel denominado do *Rochedo*, por ser cortado em rocha viva, com 144 metros de extensão, apóz o qual, e depois de atravessar o *Rio de S. João* sobre uma ponte a 58 metros acima do nivel da agua, a linha, galgando sempre novos montes, chega ao famoso *Pico do Diabo*, que levanta o seu cume a mais de 1:000 metros de altitude, e que é cortado por 3 tuneis quasi seguidos, havendo entre elles um pequeno mas atrevido viaducto, d'onde se avistam as montanhas fronteiras ao Pico, e lá em baixo, muito ao fundo, a ria de Paranaguá.

---

(1) Vide a estampa.

Passado este ponto do traçado, que se póde bem denominar o bello-horrivel, por deixar entrever ao mesmo tempo, as asperezas dos montes eriçados de arvoredos e precipicios e a tranquilla superficie azulada da bahia longinqua, cáe-se no valle do Ypiranga, rio caudaloso e extenso que, descendo do planalto, vae desaguar no Nhundiaquara, que leva as suas aguas até o mar.

As margens do Ypiranga, alcantiladas e humidas, alimentam uma vegetação exuberante e luxuriosa, verdadeira selva, por entre a qual escachôa o rio, formando varias quedas de agua notavelmente bellas, como a denominada *Véo de Noiva.*

Tres vezes o rio é cortado, aos kilometros 66,51, 68,90 e 72,09, por outras tantas pequenas pontes, até que, afastando-se de vez, a linha attinge, ao kilometro 80, a cota mais elevada e transpõe o ultimo contraforte da serra com o tunel de *Roça Nova* como ficou dito já.

Bella, como é, a estrada do Paraná, dentro em pouco, não poderá satisfazer as exigencias do trafego n'aquelle estado brazileiro, tão adequado a uma larga colonisação europeia.

De bitola reduzida (1 metro) e mal servida quanto a material de tracção, de typo americano, satisfaz com difficuldade ás necessidades do commercio sempre crescente, e que mais avultariam ainda se, como bem necessario se torna, os portos de Paranaguá e Antonina, que a estrada serve, fossem melhorados convenientemente, facilitando o desembarque de mercadorias e de passageiros.

Com certeza, aquellas altas serras, que a linha sóbe, seriam mais frequentadas por viajantes de bom gosto, se ás bellezas locaes se alliasse mais conforto e commodidade nas carruagens destinadas aos passageiros.

São, effectivamente, pouco ou nada commodas as que actualmente servem. Acanhadas em extremo e de janellas mui estreitas, não permittem que se disfructe á vontade o grandioso panorama. Seria para desejar que se adoptassem alguns dos typos usados em linhas similares dos Estados Unidos ou da Suissa.

O melhoramento devia estender-se ao material de tracção, que precisa ser substituido por machinas que se amoldem melhor ao perfil e planta da linha, que seria mais bem servida por locomotivas articuladas do typo Mallet ou ainda pelas não articuladas do typo Goelsdorf dos caminhos de ferro austriacos.

Ao terminar esta rapida e fugidía descripção de uma ferrovia brazileira, fazemos votos por que a nação irmã não esmoreça e, com os largos recursos de que dispõe, aperte cada vez mais as malhas, ainda largas, da sua rede ferro-viaria e dentro

Planta do trecho da serra na E. de Ferro do Paraná. (Km. 42 a Km. 80)

em pouco faça correr nas emmaranhadas selvas do Amazonas a veloz locomotiva, pondo assim em contacto mais intimo e ligação mais directa a velha Europa com a região talvez mais nova do mundo inteiro — a Amazonia — que parece coeva do levantamento Andino o qual fechou, pelo lado occidental, o vasto canal terciario que separava então os planaltos brazileiros dos das Guyanas.

Porto, 5 de dezembro de 1910.

UNA VISITA BOTÁNICA AL RIFF

(Abril, Mayo 1910)

POR

Carlos Pau

La noche del 26 de Abril sali de Valencia directamente para Mellila en el vapor *Villarreal;* y el dia 28 ya estaba herborisando por los alrededores de la plaza. Las cercanias son de una aridez que desagradan; únicamente por las vertientes que miran al rio, y sin salir de la zona protegida por los fuertes, se encuentran formas curiosas. En seguida me di cuenta de la vegetacion totalmente oranesa; y hasta las especies nuevas no escapan a esa afinidad. Y por si alguien sospechara que mi viaje pudiera haber sido subvencionado, permitaseme consignar aqui, que se debió á mi bolsillo particular y á mi curiosidad no totalmente cientifica.

Una de las plantas que me llamó muy prontamente la atencion fué el *Asphodelus tenuifolius,* Cav., viviendo vezclado y en compañia del *A. fistulosus* L. Resulta una reproduccion exactisima del segundo: pero, en proporciones reducidas. Busqué inutilmente las numerosas formas intermedias de que nos habla Ball (*formae plurimae intermediae,* p. 693), ó hibridas de las dos «especies» y no pude descubrilas. Es frecuente y abundante, tanto aqui en Melilla como en todo el terreno visitado, la *Calendula algeriensis* B. R. El *Convolvulus suffruticosus* Desf., pero una variedad que la creo nueva, en los ribazos de los campos. En sitios incultos *Euphorbia medicaginea* Boiss. var. *oblongifolia* Ball, *Galium Bovei* B. R., *Onobrychis ligulifera* Pau n. sp., *Linum Moroderorum* Pau nov. sp., *Galactites Durieui* Spach, *Centaurea calcitrapa* L., *C. eriophora* L., *Leontodon vernus* (Salzm. sub Apargia), *Echinops spinosus* L. var. *latisectus, Carduus leptocladus* D. R., *Fumaria agraria* Lag., *Calycotome intermedia*

Presl., *Ononis sicula* Guss., *Fumaria glutinosa* Boiss., *Helianthemum apenninum* (L.) var. nov. *riffeum* Pau, que la tomé, par el color rosado de los pétalas por *H. virgatum* (Desf.) P., *Erodium murcicum* (Cav.!) Willd., *Cicorium divaricatum* Schousb., *Cynoglosium cheirifolium* L. var., *Linaria riffea* Pau n. sp., *Matthiola parviflora* R. Br.

Al dia siguiente sali de nuevo à herborizar; pero, la lluvia me hizo volverme ligero del campo. La tarde fué sacrificada à los amigos: y à la mañana salimos para Nador en el tren minero. Con dos caballerias del pais y su amo morito, sali con direccion à la alcazaba de Zeluan acompañado sólamente de un traficante, à donde llegué à la caida de la tarde. Impaciente por conocer las cercanias, bajamos al rio, y en unos peñascales de su margen derecha descubri especies interantissimas; pero, antes de llegar al cauce, entre las matas leñosas, herboricé la planta argelina *Cordilocarpus muricatus* Desf.

En los pañascales indicados existen especies que luego no pude ver fuera de este sitio, como son: *Lavatera maritima* Gouan, *Coronilla juncea* L., *Centaurea fragilis* Durieu, *C. involucrata* Desf., *Linum corymbiferum* Desf., *Thymus Munbyanus* B. R., *Cotyledon gaditanus* (B. R.), etc.

Al dia siguiente fuimos à la Puntilla, y apenas nos apartamos un kilometro de Zeluan, yendo por la ribazada del rio, me llama la atencion el *Astragalus lanigerus* Desf. y *Pteranthus echinatus* Forsk. La vegetacion no es variada: y tanto esta visita, como la hecha rio de Zeluan abajo, hasta el Marabo, no me produjeron abundante cosecha. Sin embargo; en la Puntilla vi abundar la *Urginea Scilla* Steinh, que no vi en otra parte; y bajando al Marabut tambien herboricé especies tan interesantes como la *Achillaea santolinoides* Lag.

La herborizacion más importante y más provechosa para mi, fué la realizada al campamento de *Bu-guen-zen* — Corazon de toro. Pertene à la sierra cercana y nos da alguna idea sobre la cordillera. Posee alguna falda de exuberante vegetacion y hacia las cumbres, rocas peladas sirven de refugio à especies interessantes. La llanura, desde Zeluan, presenta una flora diversa de la que produce la que se extiende desde Nador à Zeluan; porque, Tauima no nos proporcionó ni una sola especie diversa. Me parece algo montana à montañosa la zona zeluana; sin embargo, no lejos de Zeluan recogi una «especie» nueva para la flora africana y que en Europa habita dentro de la zona maritima. Me refiero à la *Weingaertneria canescens* Brnh, var. *macranthera* (B. et R.) Pau. — *C. macrantherus* B. R. — *Corynephorus canescens* Web. var. *maritimus* G. et G.

Igualmente en las cercanias de Zeluan descubri otra especie nueva para la flora africana: la umbelifera *Bunium Bulbocastanum* H. f.ª *B. minus* Gouan.

En los sitios incultos existian *Carduus leptocladus* D. R., *Campanula afra* Cav., *Zollikoferia nudicaulis* B., *Spitzelia cupuligera* D. R., *Hyoseris scabra* L., *Lyciun intricatum* Boiss., *Solenanthus lanatus* DC., *Antirrhinum microcarpum* Pomel, *Salvia viridis* L., *S. bicolor* Desf., *Marrubium Alysson* L., *Ballota hispanica* (L.! nomine *Murrubii*) = *B. hirsuta* Benth., *Teucrium Polium* L. var. *Achaemenis* Schrb., *Iris Sisyrinchium* L., *Verbena supina* L. f.ª *erecta!* caulibus omnino erectis, *Arisanun vulgare* Zarg. var., *Muscari comosum* Mill., = *Hyacinthus romanus* Schousb., *Juncus maritimus* Lamk et *J. acutus* L., *Cyperus distachyos* All., *Carex Halleriana* Asso, *Biscutella Lyrata,* L., *Viola arborescens* L., *Polygala rupestris* Pourr., *Velezia rigida* L., *Silene cerastioides* L., *S. apetala* Willd., *Spergularia marina* (L.), *S. diandra* Guss., *Arenaria procumbens* Vahl., *Erôdium guttutum* Desf., *Ononis reclinata* L., *Trigonella monspeliaca* L., *Lotus édulis* L., *L. ornithopodioides* L., *L. Allionii* Desv., *Scorpiurus sulcata* L., *Sc. vermiculata* L., *Biserrula Pelecinus* L., *Sedum glanduliferum* Guss., *Aizoon hispanicum* L., *Bupleurum minimum* Loefling, *Apium graveolens* L , *Foeniculum vulgare* Gaenr., *Fedia Caput bovis* Pomel, *Scabiosa monspeliensis* Iacq., etc., etc,

De Zeluan à Nador, excepto el cerrillo de Tauima, se extiende una pradera de unos doce kilometros: la vegetacion es bastante uniforme y de suelo fangoso, por las recientes lluvias; siendo imposible hacer el camino a pié. Abundan *Althaea longiflora* B. et R. var., *Lavatera trimestris* L., *Onopordon macracanthum* Schousb. y su variedad de escamas del antodio mucho menores. *Amberboa muricata* DC., *Silybum Marianum* Gaertn. y *S. eburneum* Cosson, *Scolymus hispanicus* L., y *S. maculatus* L , *Notobasis syriaca* Cass., . . . y leñosas dominantes *Withamia frutescens* Panq., *Caparis spinosa* L., *Fagonia cretica* L., *Zizyphus Lotus* Lamk., etc.

Terminaré estos ligeros apuntes con la indicacion de algunas formas, que juzgo nuevas para la ciencia.

Linum Moroderorum n. sp.

Totus habitus *L. grandifloro,* sed foliis cuspidatis corola minori sepalis latioribus brevioribusque, capsula sepalis duplo longiora optime diversum.

Ob capsulam ad *L. decumbentem* magis accedit, sed foliis, petalis et capsulis diversum.

Hedysarum Zeluanum n. sp.

Gr. Eleutherotiom Boiss. — Sat robustum caulibus herbaceis diffusis prostratis 40-50 c/m, stipulis linnearibus, foliis 5-7 jugis, foliolis oblongis glabriusculis, calycis dentibus subulatis tubo quadruplo longioribus, racemo denso, lomento 2-4 articulato, articulis orbicularibus pubescentibus muricatis.

Onobrydris ligulifera n. sp.

Annua pluricaulis caulibus prostratis simplicibus, stipulis ovato-lanceolatis abrupte aristato-cuspidatis, foliis 4-7 jugis foliolis oblongo-cuneatis emarginato mucronatis, floribus solitaris vel geminatis, calycis tubo brevissimo, basi latissima abrupte aristatis, acumine capillari, corolla clandestina, leguminibus faciebus spinosis, sutura membranacea varie secta laciniis liguliformibus.

Species insignis: *O. Matritensi* proxima.

Convolvulus suffruticosus Desf. var. *melliflorus* n. var.

Multicaulis et hirsutus, caulibus decumbentibus foliis breviter petiolatis ovato-oblongis, peduncalis axilaribus bifloribus folio duplo longioribus sub flore bracteatis, sepalis dense sericeis lanceolatis corolla mellicolora ovario pubescente.

Flores omnino *C. supino* Coss. sed folia *C. suffruticoso* Desf. — Zeluan.

var. **Melillense** n. var.

Folia breviora, pedunculis minoribus. Corola caerullea. — Melilla et Zeluan.

Linaria Riffea n. sp.

Lin. virgatae Desf. proxima sed frons *L. Duetii* Coss. Glabra, glauca, annua, caulibus decumbentibus, foliis ovatis surculorum linearibus, floribus ad axilas solitariis pedunculis 5 m/m triplo brevioribus folio, fructiferis semper erectis, calycis laciniis lanceolatis cuspidatis, corollae 23 m/m subalbidae calcare gracili 10 m/m capsula calyce breviore, seminibus oblongis tuberculatis. — Zeluan, Mellila. Vidutur sp. optima.

CORRECTIONS OF THE PRECEDING PAPER «ON THE CRITERION FOR AN EXTREME OF A FUNCTION OF ONE REAL VARIABLE»

BY

TSURUICHI HAYASHI

of the Tokyo Koto Shihan Gakko, Japan

In this *Annaes*, tomo IV, 1909, I have enunciated a criterion for an extreme of a function of one real variable, which is more extensive than usual, and applied it to the solutions of some examples involving some peculiarities.

In that paper § 10 (2), I have stated that those which we understand as the values of $f'(x)$, $f''(x)$, ... for $x = a$ or at the point $x = a$, are respectively

$$f'(a) = \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

$$f''(a) = \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{f(a+2h) - 2hf(a+h) + f(a)}{h^2}, \text{ etc.}$$

But it is right to put

$$f''(a) = \operatorname*{Lim}_{k=0} \frac{f'(a+k) - f'(a)}{k},$$

$$f'''(a) = \operatorname*{Lim}_{k=0} \frac{f''(a+k) - f''(a)}{k}, \text{ etc.,}$$

because the two expressions, for instance,

$$\lim_{k=0} \frac{f'(a+k)-f'(a)}{k}, \quad \text{i. e.} \quad f''(a),$$

and

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+2h)-2hf(a+h)+f(a)}{h^2}$$

are not necessarily equal. The latter expression may have a definite limit and yet the former expression may not exist, or even $f'(a)$ may not exist ([1]).

This correction having been done, the solutions of the three examples in my preceding paper must be changed. However the peculiarities, which I have aimed to write down there, never vanish. On the contrary, some more remarkable things take place in their solutions as is shown next.

Ex. (1) $$f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x} + cx^2. \text{ ([2])}$$

When $x \neq 0$,

$$f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} + 2cx,$$

so that $\lim_{x=0} f'(x) = 0$; and

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{h^3 \sin \frac{1}{h} + h^2}{h} = 0.$$

Hence $f'(x)$ is continuous at $x = 0$.

For the second differential coefficient $f''(x)$, we must proceed as follows.

When $x \neq 0$

$$f''(x) = 6x \sin \frac{1}{x} - 4 \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} + 2c,$$

([1]) Cf. O. Stolz, Grundzüge der Differential — und Integral — rechnung, I$^{\text{ter}}$ Theil, p. 93, 1893, or E. W. Hobson, Theory of Functions of a real variable, p. 276-277, 1907. For this remark, my thanks are due to my friend Mr. K. Ogura.

([2]) Formerly I have treated the case $c = 1$. But it seems to be interesting to try the solutions for various values of c. This change has been suggested by Mr. K. Ogura.

so that Lim $f''(x)$ is *indeterminate;* and

$$f''(0) = \lim_{k=0} \frac{3k^2 \sin\frac{1}{k} - k\cos\frac{1}{k} + 2ck}{k}$$

$$= \lim_{k=0} \left(3k\sin\frac{1}{k} - \cos\frac{1}{k} + 2c\right),$$

so that $f''(0)$ is also indeterminate. However, since the maximum of the absolute values of $\cos\frac{1}{k}$ is 1,

(*i*) if $c > \frac{1}{2}$, sgn $f''(0)$ is $+$; therefore the function has a minimum at $x = 0$;

(*ii*) if $\frac{1}{2} \geqq c \geqq -\frac{1}{2}$, sgn $f''(0)$ becomes $+$ or $-$, and $f''(0)$ can be zero; therefore the function has no extreme at $x = 0$;

(*iii*) if $c < -\frac{1}{2}$, sgn $f''(0)$ is $-$; therefore the function has a maximum at $x = 0$.

If we treat the function

$$f(x) = x^n \sin\frac{1}{x} + cx^2 \quad [n \geqq 4,\ c \gtrless 0]$$

similarly, we find

$$f''(0) = 2c,$$

and yet

$$\lim_{x=0} f''(x) \text{ is indeterminate for } n = 4,$$

and

$$\lim_{x=0} f''(x) = 2c \text{ for } n > 4.$$

Therefore if $c > 0$, the function has a minimum at $x = 0$, and if $c < 0$, the function has a maximum at $x = 0$.

Ex. (2) $$f(x) = x^2 \sin^2\frac{1}{x} + x^2. \ ^{(1)}$$

---

(1) Of course, the correction about the meaning of $f''(a)$ having been done as in this paper, the second term x^2 in this expression is of no service.

When $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x \sin^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{2}{x} + 2x,$$

so that

$$\lim_{x=0} f'(x) \text{ is indeterminate;}$$

but

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{h^2 \sin^2 \frac{1}{h} + h^2}{h} = 0.$$

Again when $x \neq 0$,

$$f''(x) = \sin^2 \frac{1}{x} - 2\frac{1}{x} \sin \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \cos \frac{2}{x} + 2,$$

so that $\lim_{x=0} f''(x)$ is also indeterminate; but

$$f''(0) = \lim_{k=0} \frac{2k \sin^2 \frac{1}{k} - \sin \frac{2}{k} + 2k}{k}$$

$$= \lim_{k=0} \left(2 \sin^2 \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \sin \frac{2}{k} + 2\right)$$

which is indeterminate

and $\operatorname{sgn} f''(0)$ can be $+$ or $-$. Therefore the function has no extreme at $x = 0$.

Ex (3) $$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} + x^2.$$

When $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + 2x,$$

so that $\lim_{x=0} f'(x)$ is indeterminate; but

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} + h^2}{h} = 0.$$

Again when $x \neq 0$,

$$f''(x) = 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} + 2,$$

so that $\lim\limits_{x=0} f''(x)$ is indeterminate; and

$$f''(0) = \lim_{k=0} \frac{2k \sin \frac{1}{k} - \cos \frac{1}{k} + 2k}{k}$$

$$= \lim_{k=0} \left(2 \sin \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k} + 2\right)$$

which is indeterminate,

and $\operatorname{sgn} f''(0)$ can be $+$ or $-$. Therefore the function has no extreme at $x = 0$.

Thus this example does not show us any other peculiarities than those which the example (2) does.

ESSAI D'UNE THÉORIE ANALYTIQUE DES LIGNES NON-EUCLIDIENNES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI
à Rome

DEUXIÈME PARTIE

Lignes de l'espace

CHAPITRE I

§ 1

Quelques systèmes de coordonnées. — O (x, y, z) étant un trièdre trirectangle, on mène par un point quelconque M de l'espace des plans perpendiculaires aux axes Ox, Oy, Oz. Si A, B, C sont les points d'intersection, on obtient un hexaèdre dont les faces OBCD, OCAE, OABF situées sur les plans coordonnés sont des quadrilatères trirectangles, et les arêtes MD, ME, MF issues du point considéré M sont normales aux plans de ces quadrilatères.

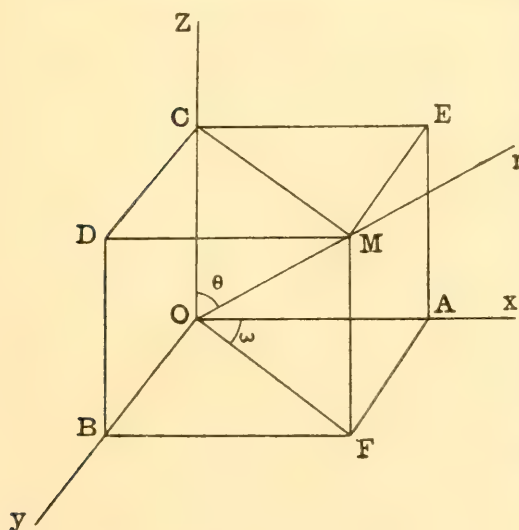



Fig. 1

Cela posé, la position d'un point de l'espace est connue aussitôt que l'on donne (en valeur et signe):

1° La *longitude* $F\hat{O}x = \omega$, la *colatitude* $MOz = \theta$ et le *rayon vecteur* $OM = R$ *(coordonnées polaires)*.

2° Les distances $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ *(coordonnées cartésiennes)*.

3° Les distances $MD = p$, $ME = q$, $MF = r$ *(coordonnées normales)*.

4° Les segments $OA = u$, $AF = v$, $FM = w$ *(coordonnées géographiques)*.

§ 2

Relations entre les coordonnées polaires, cartésiennes et normales. — Si, étant l'espace riemannien, on a recours aux triangles rectangles (OAF, MFO), (OBF, OCM), (MDC, MCO), (MEC, OFM), on trouve les relations:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} R \,.\, \sin\theta \cos\omega\,, \quad \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} R \,.\, \sin\theta \sin\omega\,, \quad \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} R \,.\, \cos\theta$$

$$\text{(2)} \qquad \sin p = \sin R \,.\, \sin\theta \cos\omega\,, \quad \sin q = \sin R \,.\, \sin\theta \sin\omega\,, \quad \sin r = \sin R \,.\, \cos\theta\,.$$

On dérive d'ici par des combinaisons évidentes:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z = \operatorname{tg}^2 R\,, \quad \sin^2 p + \sin^2 q + \sin^2 r = \sin^2 R$$

$$\text{(4)} \qquad \frac{\sin p}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sin q}{\operatorname{tg} y} = \frac{\sin r}{\operatorname{tg} z} = \cos R\,.$$

En éliminant successivement $\cos R$ entre l'équation (4) et chacune des équations (3), on trouve les relations:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \sin p = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z}}\,, \\[2ex] \sin q = \dfrac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z}}\,, \\[2ex] \sin r = \dfrac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z}} \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin p}{\sqrt{1 - \sin^2 p - \sin^2 q - \sin^2 r}}, \\ \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin q}{\sqrt{1 - \sin^2 p - \sin^2 q - \sin^2 r}}, \\ \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 p - \sin^2 q - \sin^2 r}}. \end{cases}$$

Dans l'espace lobatschewskien les relations ci-dessus sont remplacées par les autres

$$(1')\quad \operatorname{th} x = \operatorname{th} R . \sin\theta \cos\omega, \quad \operatorname{th} y = \operatorname{th} R . \sin\theta \sin\omega, \quad \operatorname{th} z = \operatorname{th} R . \cos\theta$$

$$(2')\quad \operatorname{sh} p = \operatorname{sh} R . \sin\theta \cos\omega, \quad \operatorname{sh} q = \operatorname{sh} R . \sin\theta \sin\omega, \quad \operatorname{sh} r = \operatorname{sh} R . \cos\theta$$

$$(3')\quad \operatorname{th}^2 x + \operatorname{th}^2 y + \operatorname{th}^2 z = \operatorname{th}^2 R, \quad \operatorname{sh}^2 p + \operatorname{sh}^2 q + \operatorname{sh}^2 r = \operatorname{sh}^2 R$$

$$(5')\quad \begin{cases} \operatorname{sh} p = \dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x - \operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 z}}, \\ \operatorname{sh} q = \dfrac{\operatorname{th} y}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x - \operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 z}}, \\ \operatorname{sh} r = \dfrac{\operatorname{th} z}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x - \operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 z}} \end{cases}$$

$$(6')\quad \begin{cases} \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} p}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 p + \operatorname{sh}^2 q + \operatorname{sh}^2 r}}, \\ \operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{sh} q}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 p + \operatorname{sh}^2 q + \operatorname{sh}^2 r}}, \\ \operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} r}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 p + \operatorname{sh}^2 q + \operatorname{sh}^2 r}}. \end{cases}$$

Application. — On déduit du triangle rectangle OCM

$$\sin CM = \sin R \sin\theta = \sqrt{\sin^2 p + \sin^2 q}\,.$$

Si donc on rappelle les équations (5), et que l'on fasse des considérations analogues dans l'espace lobatschewskien, on trouve:

La distance Δ du point (x, y, z) à l'axe coordonné Oz est dé-

finie par une des équations:

$$
(7)\quad \begin{cases}
\sin\Delta = \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z}}, \\[2ex]
\cos\Delta = \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{th}^2 y + \operatorname{tg}^2 z}}, \\[2ex]
\operatorname{tg}\Delta = \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}}
\end{cases}
\qquad \text{(dans l'espace r.)}
$$

$$
(7')\quad \begin{cases}
\operatorname{sh}\Delta = \dfrac{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + \operatorname{th}^2 y}}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x - \operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 z}}, \\[2ex]
\operatorname{ch}\Delta = \dfrac{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z}}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x - \operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 z}}, \\[2ex]
\operatorname{th}\Delta = \dfrac{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + \operatorname{th}^2 y}}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z}}.
\end{cases}
\qquad \text{(dans l'espace l.)}
$$

§ 3

Relations entre les coordonnées cartésiennes et géographiques. — En envisageant les quadrilatères trirectangles OABF, OCFM et le triangle rectangle OAF, on trouve les équations

$$
\frac{\operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} y} = \cos x, \quad \frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} z} = \cos \mathrm{OF} = \cos x \cos v.
$$

On en conclut que *les coordonnées cartésiennes et géographiques sont liées entre elles par les relations*

$$
\left.\begin{aligned}
&(8)\quad u = x, \quad \operatorname{tg} v = \cos x \operatorname{tg} y, \quad \operatorname{tg} w = \frac{\cos x \operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + \cos^2 x \operatorname{tg}^2 y}} \\
&(9)\quad x = u, \quad \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} v}{\cos u}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} w}{\cos u \cos v}
\end{aligned}\right\} \text{(dans l'espace r.)}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&(8')\quad u = x, \quad \operatorname{th} v = \operatorname{ch} x \operatorname{th} y, \quad \operatorname{th} w = \frac{\operatorname{ch} z \operatorname{th} z}{\sqrt{1 - \operatorname{ch}^2 x \operatorname{th}^2 y}} \\
&(9')\quad x = u, \quad \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{th} v}{\operatorname{ch} u}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{th} w}{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v}
\end{aligned}\right\} \text{(dans l'espace l.)}
$$

Applications. — Comme l'on déduit d'ici

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{\sqrt{\sin^2 u + \operatorname{tg}^2 v}}{\cos u},$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z} = \frac{1}{\cos u \cos v \cos w},$$

la première équation (7) démontre que *la distance du point* (u, v, w) *à l'axe* Oz *est définie par la relation*

$$(10) \quad \begin{cases} \sin \Delta = \cos w \sqrt{\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v} \\ \quad\;\; = \cos w \sqrt{\sin^2 u + \sin^2 v - \sin^2 u \sin^2 v} \end{cases} \quad \text{(dans l'esp. r.)}$$

$$(10') \quad \begin{cases} \operatorname{sh} \Delta = \operatorname{ch} w \sqrt{\operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v} \\ \quad\;\; = \operatorname{ch} w \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \operatorname{sh}^2 v + \operatorname{sh}^2 u \operatorname{sh}^2 v} \end{cases} \quad \text{(dans l'espace l.)}$$

§ 4

Cosinus directeurs d'une droite. — M étant un point quelconque d'une droite r issue de l'origine (Fig. 1), si l'on pose

$$(rx) = \alpha, \quad (ry) = \beta, \quad (rz) = \gamma,$$

les triangles rectangles OAM, OBM, OCM donnent

$$\operatorname{tg} OM . \cos \alpha = \operatorname{tg} OA, \quad \operatorname{tg} OM . \cos \beta = \operatorname{tg} OB, \quad \operatorname{tg} OM . \cos \gamma = \operatorname{tg} OC,$$

de sorte que si l'on rappelle la relation (3), on a l'identité

$$(11) \qquad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

vérifiée indifféremment dans les trois espaces.

Il faut remarquer cependant que cette relation subsiste dans les espaces non-euclidiens, seulement si la droite passe par l'origine.

§ 5

Angle de deux droites. — Soient r (α, β, γ), r_1 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ deux droites issues de l'origine et θ leur angle.

Si à l'entour de l'origine O on construit une surface fermée d'une telle petitesse que l'espace intérieur puisse être consi-

déré euclidien, on a la formule

$$(12) \qquad \cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 .$$

Celle-ci étant une relation *angulaire* relative à des droites issues du point O intérieur à l'espace isolé, subsiste évidemment quelle que soit la nature de l'espace.

Sur les droites r, r_1 prenons les points $A(x, y, z)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$ à la distance $OA = R$, $OA_1 = R_1$ de l'origine. Puisque

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} R}, \ \ldots\ldots; \quad \cos\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} R_1}, \ \ldots\ldots$$

la relation (12) démontre que: *Le cosinus de l'angle* θ *compris entre les rayons vecteurs* R, R_1 *est exprimé par la formule*

$$(13) \qquad \cos\theta = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} y_1 + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} z_1}{\operatorname{tg} R . \operatorname{tg} R_1} .$$

Dans l'espace lobatschewskien on a un résultat analogue.

Il va sans dire que dans les espaces non-euclidiens les relations (12), (13) sont applicables seulement aux couples de droites issues de l'origine.

§ 6

Distance de deux points. — En appelant d la distance des points A (x, y, z), A_1 (x_1, y_1, z_1) et θ l'angle des vecteurs $OA = R$, $OA_1 = R_1$, le triangle OAA_1, si l'espace est riemannien, donne

$$(14) \qquad \cos d = \cos R \cos R_1 + \sin R \sin R_1 \cos\theta .$$

Si l'on pose pour abréger

$$(15) \qquad \xi = \operatorname{tg} x, \quad \eta = \operatorname{tg} y, \quad \zeta = \operatorname{tg} z,$$

il résulte (§ 2)

$$\operatorname{tg} R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \operatorname{tg} R_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2};$$

de sorte que si l'on rappelle la relation (13), en faisant en outre un calcul analogue dans l'espace lobatschewskien à l'aide des relations

$$(15') \qquad \xi = \operatorname{th} x, \quad \eta = \operatorname{th} y, \quad \zeta = \operatorname{th} z,$$

on trouve: *La distance* d *entre les points* (ξ, η, ζ), (ξ_1, η_1, ζ_1) *est définie par une des formules*

$$(16)\quad \begin{cases} \cos d = \dfrac{1+\xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\sqrt{1+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2}} \\ \sin d = \sqrt{\dfrac{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2+(\xi\eta_1-\xi_1\eta)^2+(\eta\zeta_1-\eta_1\zeta)^2+(\zeta\xi_1-\zeta_1\xi)^2}{(1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(1+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}} \\ \operatorname{tg} d = \dfrac{\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2+(\xi\eta_1-\xi_1\eta)^2+(\eta\zeta_1-\eta_1\zeta)^2+(\zeta\xi_1-\zeta_1\xi)^2}}{1+\xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1} \end{cases}$$

dans l'espace riemannien, et

$$(16')\quad \begin{cases} \operatorname{ch} d = \dfrac{1-\xi\xi_1-\eta\eta_1-\zeta\zeta_1}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}\,\sqrt{1-\xi_1^2-\eta_1^2-\zeta_1^2}} \\ \operatorname{sh} d = \sqrt{\dfrac{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2-(\xi\eta_1-\xi_1\eta)^2-(\eta\zeta_1-\eta_1\zeta)^2-(\zeta\xi_1-\zeta_1\xi)^2}{(1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2)(1-\xi_1^2-\eta_1^2-\zeta_1^2)}} \\ \operatorname{th} d = \dfrac{\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2-(\xi\eta_1-\xi_1\eta)^2-(\eta\zeta_1-\eta_1\zeta)^2-(\zeta\xi_1-\zeta_1\xi)^2}}{1-\xi\xi_1-\eta\eta_1-\zeta\zeta_1} \end{cases}$$

dans l'espace lobatschewskien.

§ 7

Équation du plan. — Soient: $OP = \Delta$ la distance de l'origine au plan considéré, R le rayon vecteur relatif à un point quelconque A de ce plan, (λ, μ, ν) et (α, β, γ) les inclinaisons des segments OP et OA sur les axes coordonnés, et θ l'angle $A\hat{O}P$.

Si l'on remarque que

$$\operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} \Delta}{\cos \theta}, \quad \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} R}, \ \ldots\ldots$$

la relation (12) revient à l'autre

$$(17)\qquad \cos \lambda . \operatorname{tg} x + \cos \mu . \operatorname{tg} y + \cos \nu . \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} \Delta .$$

Telle est l'équation du plan riemannien en coordonnées cartésiennes.

Pour le plan lobatschewskien on a d'une façon analogue l'autre

équation

$$(17') \qquad \cos\lambda \,.\, \mathrm{th}\, x + \cos\mu \,.\, \mathrm{th}\, y + \cos\nu \,.\, \mathrm{th}\, z = \mathrm{th}\, \Delta$$

Si l'on identifie les équations linéaires générales

$$(18) \qquad a \,\mathrm{tg}\, x + b \,\mathrm{tg}\, y + c \,\mathrm{tg}\, z + d = 0$$

$$(18') \qquad a \,\mathrm{th}\, x + b \,\mathrm{th}\, y + c \,\mathrm{th}\, z + d = 0$$

aux équations (17), (17'), en rappelant en outre le résultant du § 4, on trouve

$$(19) \qquad \mathrm{tg}\, \Delta = \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$(19') \qquad \mathrm{th}\, \Delta = \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$(20) \quad \cos\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\mu = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\nu = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Ces calculs démontrent que les équations (18), (18'), interprétées respectivement dans l'espace riemannien ou lobatschewskien, représentent chacune un plan dont la position est bien définie [équations (19), (19'), (20)].

§ 8

Nature des points. — En supposant $\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0$ dans les premières équations (16), (16'), on trouve que *la distance* d *entre le point général* (ξ, η, ζ) *et l'origine est définie par une des équations*

$$(21) \qquad \cos d = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

$$(21') \qquad \mathrm{ch}\, d = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2}},$$

suivant la nature de l'espace.

On reconnait de la relation (21) que la distance d est toujours réelle et finie, quelles que soient les valeurs de ξ, η, ζ; de sorte que tous les points de l'espace riemannien sont réels et à distance finie.

Dans l'espace lobatschewskien au contraire [équation (21')] le point (ξ, η, ζ) est réel et à distance finie *(point propre)*, réel

à l'infini *(point-limite)*, imaginaire *(point idéal)* suivant qu'il résulte respectivement

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1 \lesseqgtr 0 .$$

Nature des plans. — Comme la tangente circulaire peut atteindre toute valeur, la relation (19) donne pour Δ une valeur déterminée et finie quelles que soient les valeurs de a, b, c, d. Tous les plans de l'espace riemannien sont donc réels et à distance finie.

La tangente hyperbolique au contraire ne peut pas surpasser l'unité, de sorte que dans l'équation (19′) on doit considérer separément les trois hypothèses

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 \gtreqless 0 ,$$

la distance Δ étant respectivement: réelle et finie *(plan propre)*, réelle et infinie *(plan-limite)*, imaginaire *(plan idéal)*.

§ 9

Distance d'un point à un plan. — Soit A (ξ, η, ζ) le point, α le plan d'équation

$$\text{(22)} \qquad A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

et $AB = \delta$ la distance à calculer.

Si $OP = p$ est la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le

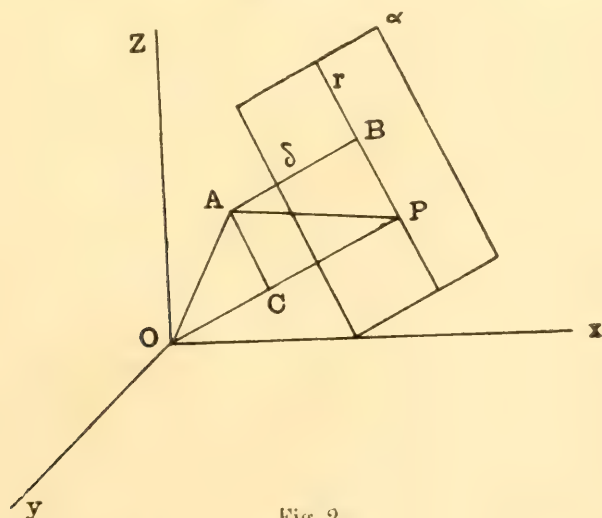



Fig. 2

plan α et r la droite BP, on a (Première Partie, § 10)

$$\sin \delta = \sin p \cdot \cos R - \cos p \cdot \sin R \cos \widehat{POA}, \tag{23}$$

R étant le rayon vecteur OA. Mais (§ 2)

$$\operatorname{tg} R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

et d'ailleurs (en vertu de formules connues)

$$\sin p = \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}}, \quad \cos p = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}},$$

$$\cos \widehat{POA} = \frac{A\xi + B\eta + C\zeta}{\operatorname{tg} R \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Si l'on introduit donc ces valeurs dans l'équation (23) en faisant en outre des considérations analogues dans l'espace lobatschewskien, on a : *La distance* d *entre le point* (ξ, η, ζ) *et le plan* (22) *est définie par la formule*

$$\sin \delta = \frac{A\xi + B\eta + C\zeta + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \quad \text{(dans l'espace r.)}$$

$$\operatorname{sh} \delta = \frac{A\xi + B\eta + C\zeta + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D^2}\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2 + \zeta^2}} \quad \text{(dans l'espace l.)}$$

CHAPITRE II

§ 10

On définit la sphère comme *une surface orthogonale aux rayons d'une étoile.*

Il s'ensuit que les sphères riemanniennes sont des surfaces de même nature ayant le centre réel et à distance finie.

Dans l'espace lobatschewskien au contraire il y a trois sortes de sphères, suivant que l'étoile de rayons que l'on emploie dans leur construction a pour centre un point réel à distance finie *(sphère propre)*, un point réel à l'infini *(orisphère)*, un point idéal *(hypersphère)*.

Sphère propre. — Si C (ξ_0, η_0, ζ_0) est le centre d'une sphère propre non-euclidienne de rayon r et P (ξ, η, ζ) un point quelconque de la surface, on a évidemment (§ 6)

$$\frac{1+\xi_0\xi+\eta_0\eta+\zeta_0\zeta}{\sqrt{1+\xi_0^2+\eta_0^2+\zeta_0^2}\sqrt{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}=\cos r \tag{1}$$

$$\frac{1-\xi_0\xi-\eta_0\eta-\zeta_0\zeta}{\sqrt{1-\xi_0^2-\eta_0^2-\zeta_0^2}\sqrt{1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}}=\operatorname{ch} r. \tag{1'}$$

Telles sont les équation des sphères non-euclidiennes à centre propre.

Pour $r=\frac{\pi}{2}$ l'équation (1) se réduit au premier degré, ce que démontre que *le plan riemannien peut être regardé comme la sphère à rayon maximum.*

Pour $r=\infty$ l'équation (1') revient à l'autre

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,$$

qui définit la sphère-limite, c'est-à-dire le lieu des points-limites de l'espace lobatschewskien.

Cette surface partage l'espace infini en deux régions : la région *intérieure* ou *réelle* et l'*extérieure* ou *idéale.*

Un plan de l'espace lobatschewskien est réel ou idéal, suivant qu'il coupe la sphère-limite le long d'un cercle réel ou imaginaire. Un plan tangent à la sphère-limite a un seul point réel, le point de contact (á l'infini), et tous les autres points idéaux ; on le dira un plan-limite de l'espace.

Une droite de l'espace lobatschewskien est réelle ou idéale, suivant qu'elle a en commun avec la sphère-limite deux points réels ou imaginaires. Une droite tangente à la sphère-limite a un seul point réel, le point de contact (à l'infini), et tous les autres points idéaux ; on la dira une droite-limite de l'espace.

Ainsi la sphère-limite est à la fois l'enveloppe de tous les plans-limites et de toutes les droites-limites de l'espace lobatschewskien.

Hypersphère. — Si l'on coupe une hypersphère par un plan passant par un de ses rayons, la section que l'on obtient est un hypercycle L ayant pour base une certaine droite a.

En faisant tourner la figure autour d'un axe perpendiculaire à la base a, cette droite engendre un plan Π, l'hypercycle L

une hypersphère, et la distance δ entre les points de cette surface et le plan Π est égale à l'hauteur de l'hypercycle.

Une hypersphère peut donc être conçue comme une surface équidistante à un plan, c'est-à-dire comme le lieu des extrémités des segments d'une longueur constante élevés perpendiculairement en tous les points d'un plan fixe α. Le plan α est la *base* de l'hypersphère et le segment constant δ en est l'*hauteur*.

L'hypersphère, considérée comme une surface orthogonale aux rayons d'une étoile dont le centre est un point-idéal, peut être conçue seulement dans l'espace lobatschewskien.

Mais si l'on la regarde comme une surface équidistante d'un plan fixe, on la peut concevoir indifféremment dans les trois espaces. Dans l'espace euclidien elle est un plan, dans les espaces non-euclidiens une surface du deuxième ordre.

Son équation, si la base est sur le plan xy, s'obtient de la troisième équation (5) ou (5′) du § 2, en y remplaçant la coordonnée r par l'hauteur δ. On obtient ainsi

$$\zeta^2 - (\xi^2 + \eta^2)\,\mathrm{tg}^2\,\delta = \mathrm{tg}^2\,\delta \qquad (2) \quad \text{(dans l'espace r.)}$$

$$\zeta^2 + (\xi^2 + \eta^2)\,\mathrm{th}^2\,\delta = \mathrm{th}^2\,\delta \qquad (2') \quad \text{(dans l'espace l.)}$$

On reconnait d'ici qu'*une hypersphère* { *riemannienne* / *lobatschewskienne* } *tourne la* { *convexité* / *concavité* } *au plan de la base.*

Orisphère. — En coupant une orisphère par un plan passant par un quelconque de ses rayons, on obtient pour section un oricycle ayant le centre en commun avec l'orisphère; et cet oricycle, dans la rotation autour de l'un de ses rayons, engendre l'orisphère.

On conclut qu'*une orisphère peut être considérée comme une surface de révolution autour de l'un quelconque de ses rayons.*

Soit (Première Partie)

$$\xi_0^2 + (1 + c^2)\,\zeta_0^2 + 2c\zeta_0 + (c^2 - 1) = 0$$

l'équation de l'oricycle-méridien L situé sur le plan xz.

En supposant que MN soit l'arc circulaire décrit par le point M de L, dans une rotation arbitraire du méridien, et que OA, OB, OC soient les coordonnées cartésiennes du point N, pro-

jeté en N_0 sur le plan xy, on a

$$\xi = \text{th OA}, \quad \eta = \text{th OB}, \quad \zeta = \text{th OC},$$

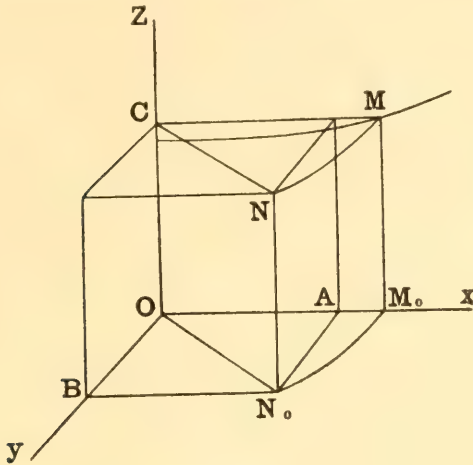



Fig. 3

et conséquemment

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{th}^2\, \text{ON}_0 = \text{th}^2\, \text{OM}_0 = \xi_0^2, \quad \zeta = \zeta_0.$$

On voit d'ici que l'*équation de l'orisphère en coordonnées* (ξ, η, ζ) *est de la forme*

$$(3) \qquad \xi^2 + \eta^2 + (1 + c^2)\zeta^2 + 2c\zeta + (c^2 - 1) = 0.$$

Si la surface passe par l'origine $c = 1$, et l'équation précédente revient à l'autre

$$(4) \qquad \xi^2 + \eta^2 + 2\zeta^2 + 2\zeta = 0.$$

§ 11

Représentation des espaces non-euclidiens sur l'espace euclidien. — En suivant un procédé analogue á celui que l'on vient d'employer dans le plan, on trouve que les formules les plus simples définissant une représentation des espaces non-euclidiens sur l'espace ordinaire, sous la condition de la conservation des

plans, peuvent s'écrire de la façon suivante

$$(5) \qquad \xi = \operatorname{tg} x, \quad \eta = \operatorname{tg} y, \quad \zeta = \operatorname{tg} z \quad \text{(dans l'espace r.)}$$

$$(5') \qquad \xi = \operatorname{th} x, \quad \eta = \operatorname{th} y, \quad \zeta = \operatorname{th} z \quad \text{(dans l'espace l.)}$$

À ces équations on peut joindre les autres

$$(6) \qquad \rho = \operatorname{tg} R$$

$$(6') \qquad \rho = \operatorname{th} R$$

liant entre-eux les rayons vecteurs R, ρ d'un point quelconque de l'espace et de son image.

En vertu de ces relations une équation finie quelconque en ξ, η, ζ représente à la fois une surface non-euclidienne et son image, suivant que dans l'intérpretation de cette équation nous nous rapportons aux axes O (x, y, z) de l'espace non-euclidien considéré, ou aux axes Ω (ξ, η, ζ) de l'espace ordinaire sur lequel on fait la représentation. — Dans le premier cas les variables ξ, η, ζ sont les tangentes (circulaires ou hyperboliques) des coordonnées cartésiennes non-euclidiennes x, y, z, dans le deuxième elles sont les coordonnées cartésiennes de l'espace ordinaire.

Des formules ci-dessus on peut tirer une foule de propriétés, dont voici quelqu'une.

1 — La transformation conserve évidemment les sphères ayant le centre à l'origine, les droites, les poliédres, les surfaces réglées générales (gauches ou développables), les cônes, les tangentes à une ligne ou à une surface, les plans osculateurs des lignes, les plans tangents des surfaces, etc.

Il s'ensuit qu'une surface non euclidienne du deuxième ordre contient, en général, deux systèmes de génératrices rectilignes (réelles ou imaginaires), qu'une surface non euclidienne du troisième ordre contient vingt sept droites . . . etc.

2 — Si l'on appelle *asympthotique* d'une surface une ligne dont les plans osculateurs sont toujours tangents à la surface, on voit tout de suite que *notre transformation conserve les lignes asympthotiques des surfaces*.

3 — S et P étant une surface et un point de l'espace non-euclidien, S_1 et P_1 leurs images euclidiennes, le cône K ayant le sommet P et tangent à la surface S a pour image le cone K_1 ayant le sommet P_1 et tangent à la surface S_1.

Il suit d'ici que la ligne de contact entre S et K a pour image la ligne de contact entre S_1 et K_1.

Autrement dit *notre transformation conserve les lignes d'ombre des surfaces.*

§ 12

(α, β, γ) étant les angles qu'une droite passant par l'origine fait avec les axes, et (x, y, z) les coordonnés d'un de ses points P, on a

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} R}, \quad \cos\beta = \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} R}, \quad \cos\gamma = \frac{\operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} R},$$

R étant le vecteur OP.

Si l'on compare ces relations aux relations analogues de l'espace ordinaire, et que l'on rappelle en outre les formules du § 11, on trouve que *notre représentation conserve les angles qu'une droite issue de l'origine fait avec les axes coordonnés.*

On en dérive [formule (12) du § 5] que l'*angle de deux droites non-euclidiennes issues de l'origine n'est nullement altéré dans la représentation.*

Une droite r' perpendiculaire en A à une autre droite r issue de l'origine, touche évidemment la sphère de centre O et de rayon OA.

Il s'ensuit (§ 11) que *deux droites non-euclidiennes orthogonales, dont l'une passe à l'origine des axes, ont pour images deux droites orthogonales.*

Π et Π' étant des plans passant par l'origine O, qui se coupent suivant la droite r, construisons en O la section normale $(r'r'')$ du dièdre $(\Pi\Pi')$. — Si l'on fait la représentation de la figure sur l'espace euclidien, les images r'_1, r''_1 des droites r', r'' sont perpendiculaires à l'image r_1 de la droite r, de sorte que l'angle $(r'_1r''_1)$ est la section normale du dièdre $(\Pi_1\Pi'_1)$ image de $(\Pi\Pi')$.

Et comme $(r'r'') = (r'_1r''_1)$, on conclut que *tout dièdre dont l'arête passe à l'origine des axes, est conservé dans la représentation.*

Soit $OA \equiv r$ la distance de l'origine à un plan Π, et r', r'' deux droites de ce plan issues du point A. — Si l'on fait la représentation de la figure sur l'espace euclidien, on a que les images $(r_1r'_1)$, $(r_1r''_1)$ des angles droits (rr'), (rr'') sont aussi des angles droits.

Conséquemment *si une droite passant à l'origine est perpendiculaire à un plan, cette condition est conservée dans l'image.*

Soit Π un plan passant par l'origine et normal à la droite r au point A. (Fig. 4).

Si l'on construit le plan $\Pi' \equiv (r, O)$, le dièdre droit $(\Pi\Pi')$

dont l'arête OA passe à l'origine, a pour image un dièdre droits de sorte que les plan; Π_1, Π'_1 images de Π, Π' se coupent à angle droit le long de la droite O_1A_1 image de OA.

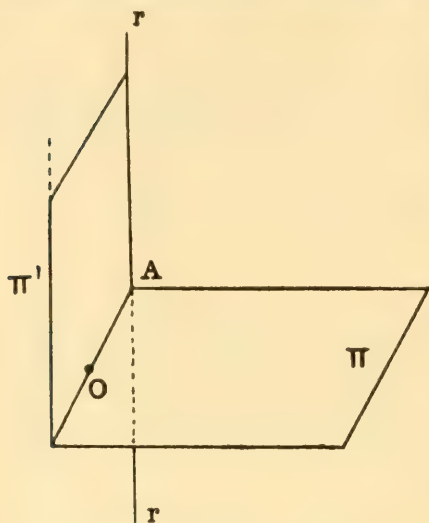



Fig. 4

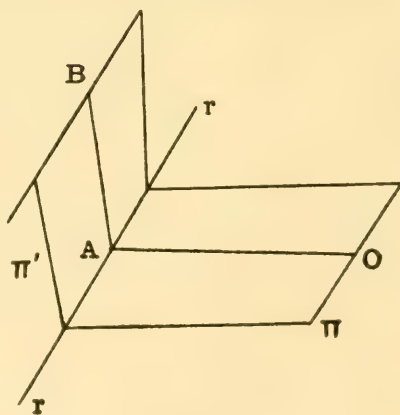
Or comme l'angle des droites orthogonales OA, r, dont la première passe à l'origine, est conservé dans la représentation, la droite r_1 (image de r) décrite sur le plan Π'_1 résulte perpendiculaire à l'intersection O_1A_1, et conséquemment perpendiculaire au plan Π_1.

On voit donc que *si un plan passant par l'origine est perpendiculaire à une droite, cette condition est conservée dans l'image.*

Soit Π un plan passant par l'origine coupé á angle droit par l'autre plan Π' le long de la droite r. (Fig. 5).

Si l'on construit la section droite $O\hat{A}B$ du dièdre droit $(\Pi\Pi')$ en partant de l'origine O, la droite AB est perpendiculaire au plan Π passant à l'origine. En rappelant donc la propriété précédente, on a que *deux plans non-euclidiens orthogonaux, dont l'un passe à l'origine des axes, ont pour images deux plans orthogonaux.*

Fig. 5

La figure correspondant à ce cas, dans laquelle on trouve les droites orthogonales AB, r, dont les images sont aussi orthogonales, et la droite AB perpendiculaire au plan $\Pi \equiv (r, O)$, démontre tout de suite que *deux droites orthogonales ont pour images deux droites aussi or-*

thogonales, si le plan déterminé par l'origine et l'une de ces droites est perpendiculaire à l'autre.

On voit donc que dans l'espace, au contraire de ce que l'on vient de trouver dans le plan, un angle droit peut avoir pour image un angle droit bien qu'aucun de ses côtés ne passe par l'origine.

§ 13

La transformation que l'on vient d'étudier conserve les plans et les sphères décrites autour de l'origine comme centre.

En remarquant donc que la condition pour qu'un cercle appartienne à une sphère ayant pour centre un point donné est que l'axe du cercle passe par ce point, on a que *l'image d'un cercle non-euclidien dont l'axe contient l'origine, est un autre cercle ayant pour axe la droite correspondante à l'axe de l'autre.*

Or, quelle que soit la nature de l'espace, une surface de révolution est le lieu d'un système de cercles ayant les centres sur l'axe et dont les plans sont normaux à cet axe. Par conséquent *une surface non-euclidienne de révolution autour d'un axe contenant l'origine, a pour image euclidienne une surface de même nature; les axes, les méridiens et les parallèles de la surface donnée et de son image sont des lignes correspondantes.*

A l'aide de ce théorème l'étude des surfaces de révolution non euclidiennes et des figures tracées sur celles-ci, est ramenée à l'étude analogue dans l'espace ordinaire.

S'il s'agit en particulier d'une sphère S décrite autour de l'origine comme centre, son image S_1 est aussi une sphère. Or comme deux arcs de grand-cercle correspondants s, s_1 de ces sphères (que nous supposons de rayons r, r_1) comprennent au centre même angle θ, on a les relations

$$s = \begin{cases} \theta . \sin r \\ \theta . \operatorname{sh} r \end{cases} \qquad s_1 = \theta r_1 = \begin{cases} \theta . \operatorname{tg} r \\ \theta . \operatorname{th} r \end{cases}$$

d'où il résulte

$$\frac{s}{s_1} = \begin{cases} \cos r \\ \operatorname{ch} r . \end{cases}$$

On voit donc que *dans la représentation d'une sphère non-euclidienne sur l'espace ordinaire les arcs de grand-cercle (et conséquemment les arcs d'une ligne quelconque tracée sur la sphère) sont altérés dans un rapport constant.*

Une sphère dans laquelle tout angle ayant le sommet au

centre a pour mésure l'arc de grand-cercle compris entre ses côtés, s'appelle *sphère trigonométrique.*

Cela posé, si l'on remarque qu'entre un arc circulaire s de rayon r et l'angle au centre correspondant θ subsiste l'une des relations

$$s = \theta r\,, \quad s = \theta \,.\, \sin r\,, \quad s = \theta \,.\, \mathrm{sh}\, r$$

suivant que l'espace est euclidien, riemannien, lobatschewskien, on a que *dans les trois espaces susdit la sphère trigonométrique a respectivement pour rayon*

$$1\,, \quad \frac{\pi}{2}\,, \quad \log(1+\sqrt{2})\,.$$

Ce résultat démontre que *dans l'espace riemannien la sphère trigonométrique se réduit à un plan.*

L'image d'un trièdre non-euclidien T de sommet O est un trièdre euclidien T_1 de sommèt Ω, et ces trièdres sont liés entre eux de façon, que les dièdres et les faces de l'un sont respectivement égaux aux dièdres et à les faces de l'autre.

Cela posé, si l'on coupe les trièdres T, T_1 par deux sphères trigonométriques de centres O, Ω, les sections que l'on obtient sont deux triangles sphériques ABC, $A_1B_1C_1$ ayant les côtés et les angles respectivement égaux.

Cette propriété entraine la conséquence que *la trigonométrie sphérique est la même dans les trois espaces.*

Mais comme la trigonométrie sphérique euclidienne coïncide à son tour avec la trigonométrie du plan riemannien, on a ce résultat intéressant: *La trigonométrie sphérique commune aux trois espaces n'est autre chose que la trigonométrie du plan riemannien.*

Ces derniers principes conduisent au résultat bien connu: *La trigonométrie sphérique ordinaire est tout-à-fait indépendante du Postulat V d'Euclide.*

§ 14

Soient: S_1 une hypersphère d'hauteur δ ayant pour base le plan S, L_1 et L deux lignes correspondantes de ces surfaces, (A, B) et (A_1, B_1) deux couples de points infiniment rapprochés de ces lignes. — Comme AB et A_1B_1 peuvent être considérés comme un segment rectiligne et l'arc correspondant d'hypercycle d'hauteur δ, on a (Première Partie, § 24):

$$ds_1 = ds\,.\,\cos\delta\,,$$

d'où il suit par intégration

$$s_1 = s \cdot \cos \delta \,, \tag{7}$$

pourvu que l'on compte les arcs s, s_1 à partir de deux points correspondants.

La relation (7) et l'autre analogue

$$s_1 = s \cdot \operatorname{ch} \delta \tag{7'}$$

de l'espace lobatschewskien démontrent que *les lignes correspondantes d'un plan non-euclidien et d'une hypersphère équidistante ont des longueurs proportionnelles.*

Soit AC un segment rectiligne du plan S et A_1C_1 l'arc correspondant d'hypercycle sur la surface S_1. Comme AC est, sur le plan S, la plus courte distance entre les points A et C, la ligne A_1C_1 (en vertu de ce que l'on vient de dire) et sur l'hypersphère S_1 le plus court chemin entre les points A_1 et C_1. En un mot la ligne A_1C_1 est l'arc de géodésique joignant les points A_1, C_1.

On voit donc que *les lignes de l'hypersphère* S_1 *correspondantes aux droites du plan* S *sont des géodésiques de* S_1; *et ces géodésiques sont des hypercycles ayant même hauteur de l'hypersphère.*

Voici comme l'on peut procéder pour trouver la relation entre les aires de deux figures fermées correspondantes du plan S et de l'hypersphère S_1.

Soit ABC un triangle infiniment petit du plan S rectangle en A, et $A_1B_1C_1$ le triangle correspondant de l'hypersphère S_1. L'angle $B\hat{A}C$ est évidemment la section droite du dièdre AA_1 au point A; ce dièdre est donc droit. Mais comme la droite AA_1 est normale à la surface S_1, l'angle formé par les tangentes aux hypercycles A_1B_1, A_1C_1 au point A_1 est la section droite du dièdre AA_1 en ce point.

Cela prouve que le triangle hypersphérique $A_1B_1C_1$ est rectangle en A_1.

Or comme ces triangles ABC, $A_1B_1C_1$ peuvent être considérés euclidiens, à cause de leurs dimensions infiniment petites, on a

$$\text{Aire ABC} = \frac{1}{2} \text{AB} \cdot \text{AC} \,, \quad \text{Aire } A_1B_1C_1 = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \,,$$

c'est-à-dire (en remarquant que $A_1B_1 = AB . \cos \delta$, $A_1C_1 = AC . \cos \delta$)

$$\text{Aire } A_1B_1C_1 = \text{Aire ABC} \cdot \cos^2 \delta \,.$$

Cette relation peut être successivement étendue à deux triangles quelconques finis, à deux polygones et, avec plus de généralité, à deux figures fermées quelconques S, S_1.

On a donc la relation générale

$$\text{(8)} \qquad \text{Aire } S_1 = \text{Aire } S \,.\, \cos^2 \delta$$

dans l'espace riemannien, et l'autre analogue

$$\text{(8')} \qquad \text{Aire } S_1 = \text{Aire } S \,.\, \text{ch}^2 \delta$$

dans l'espace lobatschewskien.

§ 15

La géométrie hypersphérique. — Si (a, b, c) et (a_1, b_1, c_1) sont les côtés d'un triangle rectiligne riemannien ABC et de son correspondant $A_1B_1C_1$ décrit sur l'hypersphère d'hauteur δ, on a

$$a_1 = a.\cos\delta, \quad b_1 = b.\cos\delta, \quad c_1 = c.\cos\delta; \quad \hat{A}_1 = \hat{A}, \quad \hat{B}_1 = \hat{B}, \quad \hat{C}_1 = \hat{C}.$$

Or si S' est un plan riemannien ayant un paramètre caractéristique tel que, dans le passage du plan S contenant le triangle ABC à l'autre S', les segments de S soient altérés dans le rapport constant $\cos\delta$, il est évident qu'entre les éléments des triangles plans ABC, $A'B'C'$ ont lieu les relations

$$a' = a.\cos\delta, \quad b' = b.\cos\delta, \quad c' = c.\cos\delta; \quad \hat{A}' = \hat{A}, \quad \hat{B}' = \hat{B}, \quad \hat{C}' = \hat{C}.$$

Si l'on compare enfin les triangles $A_1B_1C_1$, $A'B'C'$, en faisant en outre des calculs analogues dans l'espace lobatschewskien, on trouve dans tous cas

$$a_1 = a', \quad b_1 = b', \quad c_1 = c'; \quad \hat{A}_1 = \hat{A}', \quad \hat{B}_1 = \hat{B}', \quad \hat{C}_1 = \hat{C}'.$$

Il s'ensuit que: *La géométrie de l'hypersphère* $\left\{\begin{array}{l}\textit{riemannienne}\\ \textit{lobatschewskienne}\end{array}\right\}$ *est identique à la géométrie du plan appartenant à un certain espace* $\left\{\begin{array}{l}\textit{riemannien}\\ \textit{lobatschewskien}\end{array}\right\}$ *dont le paramètre caractéristique a une convenable valeur.*

En désignant par (C_p, S_p) et (C_i, S_i) la longueur et l'aire d'un cercle plan riemannien et du cercle hypersphérique cor-

respondant, on a

$$S_i = S_p \, . \cos^2 \delta \, , \quad C_i = C_p \, . \cos \delta \, ,$$

d'où il suit

$$\frac{S_i}{C_i} = \frac{S_p}{C_p} \, . \cos \delta \, .$$

Mais si l'on désigne par ρ et ρ_i les rayons des cercles plan et hypersphérique, on a (Première Partie, § 28)

$$\frac{S_p}{C_p} = \operatorname{tg} \left(\frac{\rho}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\rho_i}{2 \cos \delta} \right) .$$

On voit donc que le rapport entre l'aire et la longuer d'un cercle riemannien est exprimé par la relation

$$\frac{S_i}{C_i} = \operatorname{tg} \left(\frac{\rho_i}{2 \cos \delta} \right) . \cos \delta \, .$$

Dans l'espace lobatschewskien on a la formule analogue

$$\frac{S_i}{C_i} = \operatorname{th} \left(\frac{\rho_i}{2 \operatorname{ch} \delta} \right) . \operatorname{ch} \delta \, .$$

(À suivre.)

BIBLIOGRAPHIA

Rodolpho Guimarães: *As Mathematicas em Portugal.* Coimbra, 1909.

Com o titulo que vimos de indicar publicou o sr. R. Guimarães em 1901 um pequeno volume contendo a lista de todos os trabalhos sobre as Mathematicas publicados por auctores porguezes durante o seculo xix, e noticias succintas muito bem feitas sobre cada um d'estes trabalhos. O interesse com que foi recebido este volume levou-o a fazer obra mais completa, sujeita porem ao mesmo plano, mas abrangendo tudo o que sobre aquellas sciencias foi escripto por auctores portuguezes desde a fundação do paiz até ao presente. Teve para isso de fazer demoradas investigações nos diversos archivos e bibliothecas portuguezas e em algumas estrangeiras, a fim de que não faltasse obra alguma no seu livro; e difficilmente se encontrará nella uma lacuna!

Ao examinar-se este livro, nota-se quanto é grande o numero de trabalhos que em Portugal se tèem publicado sobre os diversos ramos da Mathematica; entre elles porém apparecem muitos que tiveram sómente interesse didactico no tempo em que foram escriptos, e outros que não tèem importancia alguma. Mencionou-os o auctor todos, e nisto procedeu muito judiciosamente; mas, para os trabalhos que estão nestas ultimas circumstancias, limitou-se, em alguns casos, a transcrever o titulo, e, em outros. referiu-se á sua falta de interesse ou importancia, e algumas vezes aos erros que contêem.

Não é grande o numero de escriptos publicados em Portugal que tenham originalidade: mas ha alguns. Entre elles mencionaremos os de Pedro Nunes, que o sr. Guimarães estudou com cuidado e sobre os quaes deu muitas informações interessantes, e os de Daniel da Silva, infelizmente pouco conhecidos no estrangeiro. Tambem se tèem publicado em Portugal traba-

lhos de valor sobre Astronomia e Nautica, alguns dos quaes o sr. Guimarães tirou do injusto esquecimento em que jaziam.

A obra a que nos estamos referindo foi recebida no estrangeiro com muito applauso. Em virtude della a Academia das Sciencias de Madrid abriu ao auctor as suas portas, elegendo-o para socio correspondente; e muitos jornaes scientificos publicaram a seu respeito noticias cheias de louvores [1].

Com esta publicação o sr. Guimarães fez excellente serviço ao nosso paiz, que lhe deve ser grato.

G. T.

---

[1] Julgamos util reproduzir aqui alguns extractos das noticias a que nos referimos no texto.

O dr. C. Juel diz no *Nyt Tidsscrif for Matematik*, de Copenhague, no fim de uma noticia consagrada a esta obra: «Os trabalhos d'esta especie são d'uma utilidade enorme para os mathematicos e historiadores futuros».

Na *Gazeta Matematica de Bucarest* encontram-se as palavras seguintes, assignadas por Ionesen: «É inutil mostrar aqui a importancia dos livros da natureza do do sr. Guimarães para o conhecimento desenvolvido das sciencias nas nações e para a historia geral das mathematicas; e creio que d'elle não poderemos fazer maior elogio do que exprimindo o desejo de que se encontre presentemente um imitador entre nós, para fazer uma historia das mathematicas na Roumania e um inventario geral dos trabalhos feitos pelos roumanicos por toda a parte».

M. d'Ocagne escreveu no *Bulletin des Sciences Mathématiques:* «Fazendo o inventario mathematico do seu paiz o sr. Guimarães fez obra pia sob o ponto de vista scientifico... O catalogo organisado com infinita consciencia e cuidado estende-se sobre 550 paginas...».

Diz Neuberg, no *Mathesis:* «O sr. Guimarães compoz, com um perfeito conhecimento do assumpto, uma obra muito util, que tem o seu logar marcado nas bibliothecas de todos os que se interessam pela historia das mathematicas».

S. Ganeff diz, na *Revista da Sociedade Physico-mathematica de Sophia:* «É evidente que as publicações como a presente são de um interesse capital e prestam grande serviço a todos os que se occupam das mathematicas. Fazer a exposição historica d'uma sciencia em um paiz, indicar e analysar as obras que nelle a têem feito progredir, é seguramente um trabalho que merece todo o elogio; e elle servirá como modelo de trabalhos d'esta natureza em toda a nação que aprecia os esforços scientificos dos seus filhos».

O dr. Hammer escreveu no *Zeitschrift für Vermessungswessen* de Stuttgart: «Tambem fóra de Portugal despertará interesse o conscencioso e valioso trabalho do auctor».

Mr. Lebon diz no *Enseignement mathématique:* «Desejamos a este livro o acolhimento sympathico que merece, e tivemos prazer em verificar que o sr. Guimarães produziu uma obra que dá a elle e á sua nação uma grande honra».

M. Dickstein diz, no *Jornal de Mathematica* de Varsovia: «O livro do sr. Guimarães, fructo de longos e conscienciosos estudos, dá-nos uma imagem completa da litteratura mathematica portugueza, e graças ás explicações e ás notas, é um manual muito util para as pessoas que se consagram aos trabalhos bibliographicos e historicos».

Dr. Oscar Bolza: *Vorlesungen über Variationsrechnung.* Leipzig, Teubner, 1909.

Demos ha annos no *Jornal de Sciencias Mathematicas* uma noticia sobre a obra que, sob o titulo de *Letures on the calculus of variations,* o dr. O. Bolza consagrou ao methodo das variações, e referimos-nos com justo louvor ás boas qualidades d'esta obra. Sobre o mesmo assumpto vem de publicar o mesmo geometra uma obra mais completa e desenvolvida, em lingua allemã, cujo titulo vimos de escrever.

Sabe-se que, depois da fundação do Calculo das variações por Euler e Lagrange, o maior progresso que teve esta parte da Analyse mathematica é devido a Weierstrass, que d'elle se occupou em lições professadas na Universidade de Berlin. Os resultados a que chegou este eminente geometra foram divulgados e continuados por alguns dos seus discipulos e depois por outros mathematicos de diversos paizes.

Ora, a obra de Bolza representa fielmente o estado actual d'esta doutrina e a sua evolução desde que foi fundada pelos geometras mencionados acima.

Os auctores de cada methodo, proposição ou problema são sempre mencionados, e numerosas indicações bibliographicas são escriptas no fundo das suas paginas, podendo-se assim seguir a historia d'esta parte tão bella e interessante da Analyse.

A exposição das doutrinas geraes é feita com rigor, clareza e elegancia, e os problemas célebres a que se tem applicado o calculo considerado são tratados do modo completo que o estado actual d'estas doutrinas permitte. Além d'isso, são indicados, como exercicios, muitos outros problemas e muitos theoremas interessantes, com a indicação dos auctores a quem são devidos.

G. T.

ÜBER DIE ZAHLEN MIT EINER GEGEBENEN TEILERANZAHL

VON

EDMUND LANDAU

in Göttingen

EINLEITUNG

Herr E. Friocourt stellte vor längerer Zeit im Intermédiaire des Mathématiciens folgende Frage: (1)

On trouve, au-dessous de 1000, 106 *nombres qui admettent* 6 *diviseurs,* 180 *qui en admettent* 8. *Connaît on une formule qui donne combien il y a de nombres ayant* n *diviseurs, en s'arrêtant à une limite donnée?*

Es sei also $f_n(x)$ die Anzahl der (positiven, ganzen) Zahlen $\leqq x$, die genau n (positive, ganze) Teiler besitzen. Der anonyme Autor einer Antwort (2) im Intermédiaire des Mathématiciens hat schon richtig bemerkt, dass man nur nach asymptotischen Relationen über $f_n(x)$ mit Aussicht auf Erfolg fragen dürfe, weil bereits $f_2(x)$ die Anzahl der Primzahlen bis x darstellt. Ich will nun — indem ich mich auf die Ermittlung des höchsten Gliedes beschränke — in der vorliegenden Arbeit den Nachweis führen, dass $f_n(x)$ asymptotisch gleich einer der elementaren Funktionen positiven Argumentes ist. Mein Ziel ist

---

(1) No. 426, Bd. II (1895), S. 8; wiederholt im Bd. VIII (1901), S. 129.

(2) Bd. IX (1902), S. 69-71. Wenn auch sachlich das, was Anonyme sagt, zutreffend ist, so sind seine Literaturangaben ziemlich konfus. Z. B. wirft er mehrere Arbeiten von mir durcheinander, indem er behauptet, dass ich in einer bestimmten Arbeit, deren Titel er nennt, die Zetafunktion und das Goldbachsche empirische Gesetz behandle.

nämlich, für alle $n \geqq 2$ zu beweisen:

$$(1) \qquad f_n(x) \sim A \frac{x^B}{\log x} (\log \log x)^C,$$

wo A, B, C gewisse, nur von n abhängige Konstanten sind. Genauer ist, wenn p der kleinste Primfaktor von n ist und genau w Male in n aufgeht, $B = \frac{1}{p-1}$ und $C = w - 1$.

Hierzu löse ich in den §§ 1-2 die Aufgabe, bei festem, ganzem $\nu \geqq 1$ und festen, ganzen positiven $a_1, \ldots, a_\nu$ die Anzahl $g(x)$ der Zahlen $\leqq x$, welche genau ν Primfaktoren in der vorgeschriebenen Vielfachheit enthalten, asymptotisch abzuschätzen. Daraus wird sich dann in § 3 leicht die Antwort auf die gestellte Frage, d. h. der Beweis von (1) ergeben.

§ 1.

Hilfssatz [1]: *Es sei* $f(x)$ *für* $x \geqq 1$ *definiert, auf jeder endlichen Strecke* $1 \leqq x \leqq z$ *beschränkt, und es sei bei unendlich wachsendem* x

$$(2) \qquad f(x) \sim D \frac{x^E}{\log x} (\log \log x)^F,$$

wo D, E, F *Konstanten sind und* $D > 0$, $E > 0$, $F \geqq 0$ *ist.*

Es sei

$$0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_n < \cdots \text{ ad inf.},$$

und es gebe ein $\varepsilon > 0$, *so dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n^{E-\varepsilon}} = \sum_q \frac{1}{q^{E-\varepsilon}}$$

konvergiert. (Eo ipso ist dann $\lim_{n=\infty} q_n = \infty$ und $\varepsilon < E$)

Dann ist [2]

$$\sum_{q \leqq x} f\left(\frac{x}{q}\right) \sim G \frac{x^E}{\log x} (\log \log x)^F,$$

---

[1] Es liessen sich leicht weitergehende Behauptungen beweisen; mich interessiert jedoch nur der Wortlaut, den ich gerade brauche.

[2] Der Summationsbuchstabe q bedeutet in diesem Paragraphen durchweg, dass alle Zahlen q_n des betreffenden Intervalls durchlaufen werden.

wo die Konstante G *den Wert*

$$G = D \sum_q \frac{1}{q^E}$$

hat.

Beweis: Ich wähle ein ω so, dass

$$(3) \qquad \omega > \frac{1}{\varepsilon}$$

ist.

Es ist für alle hinreichend grossen x (wenn nur $0 < \log^{(\omega)} x < x$ ist) identisch

$$\sum_{q \leq x} f\left(\frac{x}{q}\right) = \sum_{q \leq \log^{(\omega)} x} f\left(\frac{x}{q}\right) + \sum_{\log^{(\omega)} x < q \leq x} f\left(\frac{x}{q}\right)$$
$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 .$$

Nach (2) ist, weil $\frac{x}{\log^{(\omega)} x}$ mit x unendlich wird, für wachsendes x und alle $q \leq \log^{(\omega)} x$ gleichmässig

$$\lim_{x=\infty} \frac{f\left(\frac{x}{q}\right)}{D \frac{\left(\frac{x}{q}\right)^E}{\log \frac{x}{q}} \left(\log \log \frac{x}{q}\right)^F} = 1 .$$

Für wachsendes x und $q \leq \log^{(\omega)} x$ ist ferner wegen

$$\log x \sim \log x - \omega \log \log x \leq \log \frac{x}{q} \leq \log x - \log q_1 \sim \log x$$

gleichmässig

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{\left(\log \log \frac{x}{q}\right)^F}{\log \frac{x}{q}} : \frac{(\log \log x)^F}{\log x} \right) = 1 ,$$

also gleichmässig

$$\lim_{x=\infty} \frac{f\left(\frac{x}{q}\right)}{D \frac{\left(\frac{x}{q}\right)^E}{\log x} (\log \log x)^F} = 1 .$$

••

In Formeln: Bei gegebenem $\delta > 0$ giebt es ein $\xi = \xi(\delta)$ derart, dass für alle $x \geqq \xi$ und alle $q \leqq \log^{(\omega)} x$

$$(1-\delta)\frac{\mathrm{D}x^{\mathrm{E}}(\log\log x)^{\mathrm{F}}}{\log x}\frac{1}{q^{\mathrm{E}}} \leqq f\left(\frac{x}{q}\right) \leqq (1+\delta)\frac{\mathrm{D}x^{\mathrm{E}}(\log\log x)^{\mathrm{F}}}{\log x}\frac{1}{q^{\mathrm{E}}}$$

ist. Für $x \geqq \xi$ ist daher

$$(1-\delta)\frac{\mathrm{D}x^{\mathrm{E}}(\log\log x)^{\mathrm{F}}}{\log x}\sum_{q \leqq \log^{(\omega)} x}\frac{1}{q^{\mathrm{E}}} \leqq \Sigma_1 \leqq (1+\delta)\frac{\mathrm{D}x^{\mathrm{E}}(\log\log x)^{\mathrm{F}}}{\log x}\sum_{q \leqq \log^{(\omega)} x}\frac{1}{q^{\mathrm{E}}}.$$

Dies besagt

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &\sim \frac{\mathrm{D}x^{\mathrm{E}}(\log\log x)^{\mathrm{F}}}{\log x}\sum_{q \leqq \log^{(\omega)} x}\frac{1}{q^{\mathrm{E}}}\\ &\sim \frac{\mathrm{D}x^{\mathrm{E}}(\log\log x)^{\mathrm{F}}}{\log x}\sum_{q}\frac{1}{q^{\mathrm{E}}}\\ &= \mathrm{G}\frac{x^{\mathrm{E}}}{\log x}(\log\log x)^{\mathrm{F}}. \qquad (4)\end{aligned}$$

Andererseits ist nach (2) a fortiori

$$f(x) = O(x^{\mathrm{E}}),$$

also bei passender Wahl von H für alle $x \geqq 1$

$$|f(x)| < \mathrm{H}x^{\mathrm{E}}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}|\Sigma_2| &\leqq \mathrm{H}\sum_{\log^{(\omega)} x < q \leqq x}\left(\frac{x}{q}\right)^{\mathrm{E}}\\ &< \mathrm{H}x^{\mathrm{E}}\sum_{\log^{(\omega)} x < q < x}\frac{1}{q^{\mathrm{E}}}\\ &= \mathrm{H}x^{\mathrm{E}}\sum_{\log^{(\omega)} x < q < x}\frac{1}{q^{\mathrm{E}-\varepsilon}}\frac{1}{q^{\varepsilon}}\\ &< \mathrm{H}x^{\mathrm{E}}\frac{1}{\log^{(\omega)\varepsilon} x}\sum_{\log^{(\omega)} x < q < x}\frac{1}{q^{\mathrm{E}-\varepsilon}}\\ &\leqq \mathrm{H}\frac{x^{\mathrm{E}}}{\log^{(\omega)\varepsilon} x}\sum_{q}\frac{1}{q^{\mathrm{E}-\varepsilon}}\\ &= O\left(\frac{x^{\mathrm{E}}}{\log^{(\omega)\varepsilon} x}\right),\end{aligned}$$

also wegen (3)

$$\Sigma_2 = o\left(\frac{x^E}{\log x}(\log\log x)^F\right). \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \sim G\frac{x^E}{\log x}(\log\log x)^F,$$

was zu beweisen war.

§ 2.

Es bezeichne $\pi_\nu(x)$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leqq x$, die aus genau ν verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sind. Bekanntlich [1] ist

$$\pi_\nu(x) \sim \frac{1}{(\nu-1)!}\cdot\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{\nu-1}. \tag{6}$$

$\pi_\nu(x)$ bedeutet, wie gesagt, die Anzahl der Zahlen

$$p_1 p_2 \cdots p_\nu \leqq x,$$

wo die p verschiedene Primzahlen bezeichnen.

Aus (6) folgt bei festem ganzem $a \geqq 1$ für die Anzahl der Zahlen

$$p_1^a p_2^a \cdots p_\nu^a \leqq x$$

die Relation

$$\pi_\nu(\sqrt[a]{x}) \sim \frac{a}{(\nu-1)!}\cdot\frac{\sqrt[a]{x}}{\log x}(\log\log x)^{\nu-1}. \tag{7}$$

Es habe nun $g(x)$ die am Ende der Einleitung angegebene Bedeutung: Anzahl der Zahlen

$$p_1^{a_1} \cdots p_\nu^{a_\nu} \leqq x,$$

wo ausser ν noch $a_1, \cdots, a_\nu$ gegebene positive ganze Zahlen sind. Es sei a die kleinste der Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_\nu$ und komme w Male vor, so dass $1 \leqq w \leqq \nu$ ist. In diesen Bezeichnungen gilt der

Satz: *Es ist*

$$g(x) \sim K\frac{\sqrt[a]{x}}{\log x}(\log\log x)^{w-1},$$

wo $K > 0$ *ist.*

---

[1] Vergl. § 56 meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin, 1909).

Beweis: Der Satz ist für $\nu = 1$ richtig, nämlich in (7) enthalten. Ich beweise ihn durch vollständige Induktion für ein $\nu \geq 2$, indem ich ihn bis zu $\nu - 1$ als bewiesen annehme.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich so numeriert denken, dass $a_{\nu-w+1} = \cdots = a_\nu = a$ ist. Falls $w = \nu$ ist, ist der Satz durch (7) bewiesen; es kommt also jetzt nur $1 \leq w \leq \nu - 1$ in Betracht.

Es durchlaufe k alle Zahlen der Gestalt $p_1^a p_2^a \cdots p_w^a$ und q alle Zahlen[1] der Gestalt $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_{\nu-w}^{a_{\nu-w}}$. Ich multipliziere ein beliebiges q mit einem beliebigen k und sehe zu, welche Zahlen dann herauskommen. Zunächst alle Zahlen $p_1^{a_1} \cdots p_\nu^{a_\nu}$ und zwar je einmal, dann aber auch, gleichfalls je einmal, die Zahlen endlich vieler Zahlklassen vom Typus $p_1^{b_1} \cdots p_\mu^{b_\mu}$, wo die Exponenten durch Zusammenlegung eines oder mehrerer a in

$$a_1, \cdots, a_{\nu-w}, a, \cdots, a$$

mit je einer der Zahlen $a_1, \cdots, a_{\nu-w}$ entstehen[2]. Stets ist dabei $\mu \leq \nu - 1$, ferner die kleinste der Zahlen $b_1, \cdots, b_\mu$ gleich a oder grösser als a, und a selbst kommt höchstens $w - 1$ Male vor. Nach dem bis zu $\nu - 1$ als bewiesen Angenommenen ist daher, wenn $f(x)$ die Anzahl der $k \leq x$ bezeichnet,

$$\sum_{q \leq x} f\left(\frac{x}{q}\right) = g(x) + o\left(\frac{\sqrt[a]{x}}{\log x} (\log \log x)^{w-1}\right). \tag{8}$$

Nun erfüllt die Funktion $f(x)$ nach (7) die im Hilfssatz geforderte Relation (2) mit den Konstanten

$$D = \frac{a}{(w-1)!}, \quad E = \frac{1}{a}, \quad F = w - 1;$$

es ist eben

$$f(x) \sim \frac{a}{(w-1)!} \frac{\sqrt[a]{x}}{\log x} (\log \log x)^{w-1}.$$

Ferner erfüllt die Klasse q die Bedingung, dass für ein gewisses

---

[1] In k und q variieren die p beliebig, so dass nicht etwa dieselben $p_1, p_2, \ldots$ gemeint sind.

[2] D. h. es ist $b_1 = a_1$ oder $a_1 + a, \ldots, b_{\nu-w} = a_{\nu-w}$ oder $a_{\nu-w} + a$, während alle eventuell folgenden b den Wert a haben.

$\varepsilon > 0$

$$\sum_q \frac{1}{q^{E-\varepsilon}} = \sum_q \frac{1}{q^{\frac{1}{a}-\varepsilon}}$$

konvergiert. In der That ist für $s > \frac{1}{a+1}$ die Reihe

$$\sum_q \frac{1}{q^s} \leqq \sum_p \frac{1}{p^{a_1 s}} \cdot \sum_p \frac{1}{p^{a_2 s}} \cdots \sum_p \frac{1}{p^{a_{\nu-w} s}}$$

konvergent, da ja jede der Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_{\nu-w}$ grösser als a, d. h. $\geqq a+1$ ist. Der Hilfssatz ist also anwendbar und liefert

$$\sum_{q \leqq x} f\left(\frac{x}{q}\right) \sim K \frac{\sqrt[a]{x}}{\log x} (\log \log x)^{w-1}, \tag{9}$$

wo

$$K = \frac{a}{(w-1)!} \sum \frac{1}{(p_1^{a_1} \cdots p_{\nu-w}^{a_{\nu-w}})^{\frac{1}{a}}}$$

ist.

Aus (8) und (9) folgt

$$g(x) \sim K \frac{\sqrt[a]{x}}{\log x} (\log \log x)^{w-1},$$

wie behauptet.

§ 3.

Nun sei n eine gegebene ganze Zahl > 1, und es soll die Anzahl $f_n(x)$ der Zahlen $\leqq x$ mit n Teilern untersucht werden. Wenn, in Primzahlpotenzen zerlegt,

$$u = p_1^{a_1} \cdots p_\nu^{a_\nu}$$

ist, sollen also die $u \leqq x$ gezählt werden, für welche

$$(a_1 + 1) \cdots (a_\nu + 1) = n$$

ist. Bei gegebenem n zerfallen die Zahlen u mit n Teilern in endlich viele Typen; n ist auf alle möglichen wesentlich verschiedenen Arten in beliebig viele Faktoren > 1 zu zerlegen:

$$n = b_1 \cdots b_\nu,$$

und alsdann sind zum Exponentensystem $b_1 - 1, \cdots, b_\nu - 1$ alle u zu finden. Für jeden dieser Typen greift eine der Funktionen $g(x)$ aus § 2 Platz; es handelt sich also darum, diejenige oder diejenigen zu ermitteln, welche asymptotisch den höchsten [1] Wert liefern. Dazu muss das kleinste vorkommende a_μ, d. h. das kleinste vorkommende b_μ, in erster Linie möglichst klein sein und in zweiter Linie möglichst oft vorkommen. Man hat also aus n seinen kleinsten Primfaktor p so oft als möglich abzuspalten. Was sonst geschieht, ist gleichgiltig; d. h., wenn jenes p genau w Male in n aufgeht, liefert jede Zerlegung

$$n = p \cdot p \cdots p \cdot n_1 \cdots n_\tau ,$$

wo

$$n_1 \cdots n_\tau = \frac{n}{p^w}$$

ist und $n_1, \cdots, n_\tau \geqq 2$ (also $\geqq p+1$), nicht aber notwendig Primzahlen sind, ein $g(x)$ von der Ordnung

$$\frac{\sqrt[p-1]{x}}{\log x} (\log \log x)^{w-1} .$$

Genau lautet das Ergebnis:

$$(10) \qquad f_n(x) \sim \frac{\sqrt[p-1]{x}}{\log x} (\log \log x)^{w-1} \; \frac{p-1}{(w-1)!} \sum \sum \frac{1}{(p_1^{n_1-1} \cdots p_\tau^{n_\tau-1})^{\frac{1}{p-1}}} ,$$

wo die äussere Summe sich auf alle wesentlich verschiedenen Zerlegungen von $\frac{n}{p^w}$ in Faktoren > 1 bezieht und die innere Summe sich auf alle Zahlen mit dem betreffenden Exponentensystem $n_1 - 1, \cdots, n_\tau - 1$ erstreckt. Die Doppelsumme bedeutet natürlich 1 im Falle $\frac{n}{p^w} = 1$.

Beispiel: $n = 18 = 2 \cdot \frac{18}{2}$; $p = 2$, $w = 1$; erstens $\tau = 2$,

---

[1] Das Ergebnis des § 2 lehrt ja, dass die zwei Systemen entsprechenden Funktionen $g(x)$ stets komparabel sind, indem ihr Quotient entwede gegen 0 oder gegen eine endliche Zahl oder gegen ∞ strebt.

$n_1 = 3$, $n_2 = 3$, zweitens $\tau = 1$, $n_1 = 9$;

$$f_{18}(x) \sim \frac{x}{\log x}\left(\sum \frac{1}{p^2 q^2} + \sum \frac{1}{p^8}\right)$$

$$= \frac{x}{\log x}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_p \frac{1}{p^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^4} + \sum_p \frac{1}{p^8}\right).$$

Überhaupt folgt aus der Theorie der symmetrischen Funktionen, dass die Doppelsumme in (10), also auch die Konstante

$$A = \frac{p-1}{(w-1)!}\sum\sum$$

in (1), sich als ganze rationale rationalzahlige Funktion der Werte von

$$P(s) = \sum_p \frac{1}{p^s}$$

für endlich viele rationale $s > 1$ darstellen lässt.

Göttingen, den 22. Juni 1911.

SUR LES CUBIQUES GAUCHES

PAR

M. C. Servais
Professeur à l'Université de Gand

---

1. Soient μ_1, μ_2, μ_3 les plans osculateurs menés d'un point M à une cubique gauche; t_1, t_2, t_3 les tangentes correspondantes; m_1, m_2, m_3 les intersections des couples de plans μ_2 et μ_3, μ_3 et μ_1, μ_1 et μ_2; A_2 et A_3 les points (t_2m_1) et (t_3m_1); B_3 et B_1 les points (t_3m_2) et (t_1m_2); C_1 et C_2 les points (t_1m_3) et (t_2m_3); s un axe quelconque de la courbe, intersection des plans osculateurs σ_1 et σ_2; s peut être une tangente à la cubique.

La droite s rencontre le plan μ_1 en un point S_1, et les traces s_1 et s_2 de σ_1 et σ_2 sur le plan μ_1 sont les tangentes menées de S_1 à la conique (μ_1) inscrite dans la développable osculatrice à la cubique et située dans le plan μ_1. Cette conique est tangente aux droites m_2 et m_3 respectivement aux points B_3 et C_2. D'après le théorème de Desargues, les rayons s_1 et s_2, S_1B_3 et S_1C_2 sont conjugués dans une involution ayant pour rayon double S_1M. Par suite les plans sB_3 et sC_2 sont conjugués dans l'involution définie par le couple σ_1 et σ_2, et le plan double sM. Un raisonnement analogue montre que les couples de plans sC_1 et sA_3, sA_2 et sB_1 sont conjugués dans cette involution. Donc:

Si μ_1, μ_2, μ_3 *sont les plans osculateurs menés d'un point* M *à une cubique gauche* t_1, t_2, t_3 *les tangentes correspondantes; les plans* μ_1, μ_2, μ_3 *sont coupés respectivement par les couples de droites* t_2 *et* t_3, t_3 *et* t_1, t_1 *et* t_2 *aux points* C_2 *et* B_3, A_3 *et* C_1, B_1 *et* A_2, *projetés d'un axe quelconque* s *de la cubique gauche suivant l'involution de plans:*

$$s\,(C_2B_3,\ A_3C_1,\ B_1A_2).$$

Les plans osculateurs σ_1, σ_2 *passant par l'axe* s *sont conjugués dans cette involution. Un plan double de cette involution passe par le point* M.

2. L'axe s de la cubique rencontre les plans μ_2 et μ_3 aux points S_2 et S_3; les droites C_1S_2, B_1S_3 coupent m_1 aux points C'_1 et B'_1; on a l'involution (I)

$$(MM,\ A_2B'_1,\ A_3C'_1)$$

par suite la projectivité

$$(M,\ A_2,\ C'_1,\ \ldots\ldots) \barwedge (M,\ A_3,\ B'_1,\ \ldots\ldots)$$

a pour élément double unique le point M. Elle est d'ailleurs déterminée par cet élément double unique et par le couple d'éléments homologues A_2 et A_3. Ainsi:

Un axe quelconque s *de la cubique gauche rencontre les plans* μ_2 *et* μ_3 *aux points* S_2 *et* S_3; *les droites* C_1S_2 *et* B_1S_3 *coupent la droite* $\mu_2\mu_3$ *aux points* C'_1, B'_1 *homologues dans la projectivité déterminée par le point double unique* M *et le couple de points correspondants* A_2 *et* A_3.

3. Dans le cas d'une parabole gauche, on peut supposer le plan μ_1 à l'infini; les coniques inscrites dans la développable osculatrice à cette courbe, sont des paraboles. Les axes de ces paraboles situées dans les plans μ_2 et μ_3 sont parallèles respectivement à S_2C_1 et S_3B_1. Le point M étant à l'infini la projectivité précédente indique que les segments A_2A_3 et $B'_1C'_1$ sont égaux. Par suite

Un axe quelconque s *d'une parabole gauche rencontre deux plans osculateurs fixes* μ_2 *et* μ_3 *de cette courbe, aux points* S_2 *et* S_3; *les parallèles menées par les points* S_2 *et* S_3 *respectivement aux axes des paraboles inscrites dans la développable osculatrice et situées dans les plans* μ_2 *et* μ_3, *déterminent sur la droite* $\mu_2\mu_3$ *un segment* $C'_1B'_1$ *de longueur constante.*

4. Sur l'axe m_1 on a la projectivité à élément double unique M

$$(M,\ A_2\ \ldots\ldots) \barwedge (M,\ A_3,\ \ldots\ldots)$$

d'où l'on déduit les faisceaux projectifs:

$$C_1\ (M,\ A_2,\ \ldots\ldots) \barwedge B_1\ (M,\ A_3,\ \ldots\ldots).$$

Un plan quelconque π coupe ces deux faisceaux suivant deux ponctuelles projectives et les droites qui joignent les points correspondants enveloppent une conique (π_1) tangente aux plans μ_1, μ_2, μ_3. L'axe de la cubique gauche situé dans le plan π est une tangente à la conique (π_1) (2). Par suite:

Les faisceaux projectifs:

$$C_1 (M, A_2, \ldots\ldots) \barwedge B_1 (M, A_3, \ldots\ldots)$$

$$A_2 (M, B_3, \ldots\ldots) \barwedge C_2 (M, B_1, \ldots\ldots)$$

$$B_3 (M, C_1, \ldots\ldots) \barwedge A_3 (M, C_2, \ldots\ldots)$$

sont coupés par un plan quelconque π suivant des ponctuelles projectives à l'aide desquelles on engendre les coniques (π_1), (π_2), (π_3). Ces trois coniques ont quatre tangentes communes.

On conclut de cette propriété qu'étant donnés les plans osculateurs μ_1, μ_2, μ_3 de la cubique et les tangentes correspondantes t_1, t_2, t_3 on peut construire l'axe de la courbe situé dans le plan π.

Si le plan π est osculateur à la cubique les coniques (π_1), (π_2), (π_3) coïncident avec la conique inscrite dans la développable osculatrice et située dans le plan π (2).

5. Un point S_3 étant donné dans le plan osculateur μ_3 on peut construire l'axe de la cubique passant par ce point et extérieur au plan μ_3. La droite B_1S_3 coupe m_1 au point B'_1. On détermine son homologue C'_1 dans la projectivité (2)

$$(M, A_2, C'_1, \ldots\ldots) \barwedge (M, A_3, B'_1, \ldots\ldots).$$

La droite A_2S_3 coupe m_2 au point A'_2, on construit son homologue C'_2 dans la projectivité

$$(M, B_3, A'_2, \ldots\ldots) \barwedge (M, B_1, C'_2, \ldots\ldots).$$

L'axe cherché s'appuie sur les droites $C_1C'_1$, $C_2C'_2$.

6. Corrélativement: *Si* M_1, M_2, M_3 *sont les points d'intersection d'un plan* μ *et d'une cubique gauche*, t_1, t_2, t_3 *les tangentes correspondantes, les points* M_1, M_2, M_3, *sont projetés respectivement des couples de droites* t_2 *et* t_3, t_3 *et* t_1, t_1 *et* t_2 *suivant les plans* γ_2 *et* β_3, α_3 *et* γ_1, β_1 *et* α_2, *qui déterminent sur une sécante quelconque* s *de la cubique trois couples de points en involution.*

Les points de la sécante situés sur la courbe sont conjugués dans cette involution. Un point double de cette involution est situé dans le plan μ.

Si σ_2, σ_3 *désignent respectivement les plans* sM_2, sM_3, *les droites* $\sigma_2\gamma_1$ *et* $\sigma_3\beta_1$ *sont dans deux plans* γ'_1 *et* β'_1 *du faisceau ayant pour axe* M_2M_3 *et homologues dans la projectivité déterminée par le plan double unique* μ *et le couple de plans correspondants* α_2 *et* α_3.

Etant donnés trois points M_1, M_2, M_3 d'une cubique gauche et les tangentes correspondantes t_1, t_2, t_3, on peut construire la sécante de la courbe issue d'un point donné P.

SUR L'APPROXIMATION DES RACINES COMPLEXES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

PAR

A. Kempe

à Rotterdam

Dans ce qui suit je me propose de revenir sur ce que j'ai remarqué par rapport aux *racines complexes* des équations dans mon mémoire: *Sur l'approximation des racines des équations de degré superieur* inséré dans le Vol. XLVIII (1° de la serie 3ième), 1910, du *Journal des Mathématiques de Battaglini,* la chose étant bien plus compliquée que je ne le pensais pas, vu que le calcul des *deux* coefficients réels, qui composent une racine complexe, est pour l'approximation numerique directe trop pénible. Aussi il faut corriger quelques erreurs de calcul, correction qui sera faite par une méthode tout à fait directe pour quatre racines complexes et approximative restreinte pour six et huit racines complexes.

Commençons pour rappeler la définition d'une racine complexe: elle est la somme algébrique de l'unité réelle multipliée par un nombre réel et de l'unité imaginaire multipliée par un autre nombre réel; ainsi la formule d'une telle racine est $a \pm bi$, a et b étant des nombres réels.

Ceci posé, nous nommerons respectivement x_1, x_2, x_3, x_4 les racines complexes $a+bi$, $a-bi$, $c+di$, $c-di$ de l'équation donnée (nous bornant pour le moment à quatre) et nous supposerons que, avant de les calculer, on ait déterminé les racines réelles.

1.° Maintenant, quand une équation de degré quelconque a *deux racines complexes,* il est bien facile de les calculer, car

$$x^n + fx^{n-1} + gx^{n-2} + \ldots + p = 0$$

étant l'équation donnée et $x_3, \ldots, x_n$ étant les racines réelles, il est évident que

$$x_1 + x_2 = 2a = -f - (x_3 + x_4 + \ldots + x_n),$$

que

$$x_1 . x_2 = a^2 + b^2 = \frac{\pm p}{x_3 . x_4 . x_5 . x_6 \ \ldots \ x_n}$$

et que ces deux équations déterminent complètement les deux nombres réels a et b dont dépendent les racines complexes cherchées.

2.° Quant l'équation a *quatre racines complexes,* la chose devient un peu plus compliquée. Supposons, comme nous l'avons énoncé, que les racines réelles de l'équation donné soient connues; alors on peut réduire l'équation donnée à une quartique, en la divisisant par $(x - x_5)$ $(x - x_6)$ $\ldots$ $(x - x_n)$. La quartique qui en resulte n'aura que des racines complexes. Prenons donc la quartique à racines complexes $\left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = a \pm bi, \ \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} = c \pm di\right)$

$$x^4 + fx^3 + gx^2 + hx + k = 0. \tag{1}$$

On aura, en développant $(x - x_1)$ $(x - x_2)$ $(x - x_3)$ $(x - x_4) = 0$, les équations suivantes en a, b, c et d:

$$a + c = \frac{-f}{2}, \tag{2}$$

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 4\,ac = g, \tag{3}$$

$$2c\,(a^2 + b^2) + 2a\,(c^2 + d^2) = -h, \tag{4}$$

$$(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2) = k. \tag{5}$$

Observons que $a^2 + b^2$ et $c^2 + d^2$ sont exprimés implicitement en a, c et les constantes de (1); il n'est pas difficile de les exprimir explicitement *en fonction de ces grandeurs* de la manière suivante.

Les équations (3) et (4) donnent

$$a^2 + b^2 = \frac{2\,(4\,ac - g)\,a - h}{2\,(c - a)}, \tag{6}$$

$$c^2 + d^2 = \frac{2\,(4\,ac - g)\,c - h}{2\,(a - c)}, \tag{7}$$

et ces équations rendent le calcul de a et c facile. Car, en multipliant (6) et (7) et en tenant compte de (5), on a

$$k^2 = \frac{2(4\,ac-g)\,a-h}{2(c-a)} \cdot \frac{2(4\,ac-g)\,c-h}{2(a-c)} . \qquad (8)$$

En tenant compte de (2) et en remplaçant a^2+c^2 par $-2\,ac+\frac{f^2}{4}$, l'équation (8) prend la forme

$$(ac)^3-\frac{1}{2}g\,(ac)^2+\frac{g^2+fh-4\,k}{16}(ac)+\frac{h^2+kf^2-hfg}{64}=0\,, \qquad (9)$$

équation de 3ième degré, qui exprime (ac) en fonction des coefficients de (1). On peut la resoudre p. e. par la methode approximative donnée pour les racines réelles.

Posons $ac=l$, $a+c$ étant donné; nous voyons que les équations

$$a+c=-\frac{f}{2} \quad \text{et} \quad ac=l \qquad (9^a)$$

remplacent tout-à-fait les équations (2) à (5) pour le calcul de a et c.

Ces groupes (9^a) sont remarquables; nous les retrouverons ci-après, et, modifiés, ils nous aideront dans des cas plus difficiles.

Les quantités a et c étant connues, (6) et (7) donneront b et d.

L'équation (9) *est la solution générale des équations de la forme* (1) *à quatre racines complexes.*

Voyons des exemples de la doctrine précédente.

1.° *Deux racines complexes.*

Soit

$$x^4-4\,x^3+3\,x^2+77\,x-10077=0\,. \qquad (10)$$

Le théorème de Sturm, ou celui de M. Bes (voir à ce sujet «*Het Wiskundig Tydschreift*», Année 7, Liv. I, 1910) [1], nous assure qu'il y a deux racines réelles et deux complexes.

Quant aux racines réelles, on trouve

$$x_3=10.886, \quad x_4=-9.26096,$$

---

[1] Titre en français : Périodique Mathématique, red. MM. Vaes, Keredict et Quint.

donc

$$x_1 + x_2 = 2a = 2.37496, \quad a = 1.18748,$$

$$x_1 x_2 = a^2 + b^2 = \frac{-10077}{x_3 x_4} = 100,$$

et à peu près

$$b = \pm 9.929;$$

donc:

$$x_1 = 1.18748 + 9.929 \ldots i \quad x_2 = 1.18748 - 9.929 \ldots i.$$

2.° *Quatre racines complexes.*

Soit:

$$x^4 - 27.4\,x^3 + 290.33\,x^2 - 1420.668\,x + 2781.4824 = 0 \quad (11)$$

l'équation correspondant à (1), n'ayant que des racines complexes; l'équation (8) deviendra:

$$(ac)^3 - 145.165\,(ac)^2 + 7005.743\,(ac) - 112421{,}098 = 0 \quad (12)$$

avec trois decimales exactes. Les racines de (12) sont:

$$(ac)_1 = 44.82, \quad (ac)_2 = 53.1725, \quad (ac)_3 = 47.1725,$$

dont les deux dernières ne peuvent pas satisfaire, parce qu'elles rendent a et c complexes, et ces nombres sont réels.

Ainsi nous avons

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2(a + c) = 27.4, \quad ac = 44.82,$$

$$a = 8.3, \quad c = 5.4, \quad b = 2, \quad d = 3,$$

[ces dernières valeurs résultent des équations (6) et (7)] ou

$$a = 5.4, \quad c = 8.3, \quad b = 3, \quad d = 2,$$

ce qui importe peu, les équations (2) à (5) étant symétriques et restant invariables en changeant a en c, b en d, c en a, d en b.

Donc

$$x_1 = 8.3 + 2i, \quad x_2 = 8.3 - 2i, \quad x_3 = 5.4 + 3i, \quad x_4 = 5.4 - 3i$$

sont les racines complexes de (11).

3.° *Six racines complexes.*

Soit

$$x^6 + hx^5 + kx^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p = 0 \tag{13}$$

une équation à six racines complexes

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = a \pm bi, \quad \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} = c \pm di, \quad \begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix} = f \pm gi;$$

on trouve aisément, en développant,

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6) = 0,$$

$$2a + 2c + 2f = -h, \tag{14}$$

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + (f^2 + g^2) + 4ac + 4af + 4cf = k, \tag{15}$$

$$2(a+c)(f^2+g^2) + 2(a+f)(c^2+d^2) + 2(c+f)(a^2+b^2) + 8acf = -l, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &(a^2+b^2)(c^2+d^2) + (a^2+b^2)(f^2+g^2) + (c^2+d^2)(f^2+g^2) \\ &+ 4ac(f^2+g^2) + 4af(c^2+d^2) + 4cf(a^2+b^2) = m, \end{aligned} \tag{17}$$

$$2a(c^2+d^2)(f^2+g^2) + 2c(a^2+b^2)(f^2+g^2) + 2f(a^2+b^2)(c^2+d^2) = -n, \tag{18}$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(f^2+g^2) = p. \tag{19}$$

Elles sont symétriques et sont identiques aux équations (2) à (5) quand $f = g = 0$. Si l'on voulait en déduire une équation à une seule inconnue, une équation en a, par exemple, on trouverait une équation de degré 720. On n'y pensera pas. Remarquons que, comme en (2) — (5), $a^2 + b^2$, $c^2 + d^2$, $f^2 + g^2$ sont exprimables en fonctions de a, c, f et des coefficients de (13).

Combinant (15), (16) et (18), les seules qui donnent lieu à une équation quadratique — toute autre combinaison surpassant le deuxième degré — nous aurons:

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + (f^2 + g^2) = k - 4(ac + af + cf), \tag{15}$$

$$\begin{aligned} (c-f)(c^2+a^2) + (a-f)(a^2+b^2) &= [k - 4(ac + af + cf)](a+c) \\ &+ \frac{l + \delta acf}{2} = \mu \text{ (pour abréger)}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} (a^2+b^2) + \frac{\mu-(a-f)(a^2+b^2)}{c-f} - \frac{n(c-f)+2f(a^2+b^2)\times[\mu-(a-f)(a^2+b^2)]}{2a[\mu-(a-f)(a^2+b^2)]+2c(a^2+b^2)(c-f)} \\ = k - 4(ac+af+cf). \end{aligned} \tag{21}$$

Puis: la quadratique (21) nous donne a^2+b^2 en fonction de a, c, f, etc.; (20) nous donne c^2+d^2 en fonction des mêmes quantités, enfin (15) exprimera f^2+g^2 en fonction des mêmes nombres.

Voila donc des équations analogues à (6) et (7), seulement là elles étaient de premier degré par rapport à (a^2+b^2) et (c^2+d^2), tandis qu'ici l'équation qui détermine (a^2+b^2) est de deuxieme degré et c'est justement là qu'est une difficulté *presque insurmontable.* Car voulant substituer les valeurs de (a^2+b^2), (c^2+d^2), (f^2+g^2) dans les équations (17) et (19), substitutions qui au-dessus nous ont mené à l'équation (8), qui à son tour nous a donné les groupes $a+c$ et ac (9^a), on obtient deux équations en a, c et f d'une longueur telle que je suis été obligé d'allonger le papier d'un mètre environ, pour les écrire dans tout leur étendue. Il faut donc agir autrement.

Remarquons que les équations (15) et (20) contiennent les groupes $ac+af+cf$ et acf, qui, combinés avec $a+c+f=-\frac{h}{2}$, sont trois fonctions de a, c, f, qu'il nous faut connaître pour le calcul de a, c et f.

Soient donc s et r les valeurs des groupes acf et $ac+af+cf$; nous aurons

$$a+c+f=-\frac{h}{2}, \qquad (14)$$

$$ac+af+cf=r, \qquad (22)$$

$$acf=s, \qquad (23)$$

ou les groupes remarquables dont nous avons parlé à propos de (9^a), modifiés naturellement pour le cas de six racines complexes. En effet pour $f=0$ ces équations se reduisant aux équations (9^a). Ce sont les combinaisons une à une, deux à deux, trois à trois des éléments a, c et f que en (9^a) on ne pourrait pas encore distinguer. L'étude de ces groupes est beaucoup plus facile que la résolution des longues équations dont nous parlions tout à l'heure pour calculer les valeurs de a, c et f.

Supposant a, c et f positifs et $\geqq 1$, supposition qu'on peut toujours réaliser en augmentant les racines; nous pouvons déduire de (14), (22) et (23) les deux équations:

$$(a+c)^3+h(a+c)^2+\left(\frac{h^2}{4}+r\right)(a+c)+\frac{rh}{2}+s=0, \qquad (24)$$

$$ac=r+(a+c)\left(\frac{h}{2}+a+c\right). \qquad (25)$$

Mais, comme $(a-c)^2 > 0$, on aura:

$$(a+c)^2 - 4\,ac = -4\,r - 4\,(a+c)\frac{h}{2} - 3\,(a+c)^2 > 0$$

ou

$$r + (a+c)\left[\frac{h}{2} + \frac{3}{4}(a+c)\right] < 0 \ldots (h < 0). \qquad (26)$$

Avec $a+c < -\frac{h}{2}$ nous aurons en (24), (25) et (26) tout ce qu'il nous faut pour déterminer les valeurs approximatives de r, $a+c$, f, acf, ac, $(a-c)^2$, a et c, formant un système, un ensemble: bien entendu que nous substituons en (26) à r une valeur moyenne et à $a+c$ successivement $-\frac{h}{2}-1$, $-\frac{h}{2}-2$, etc. Ces substitutions ne sont pas indéfinies, vu qu'une valeur moyenne est un bon point de départ et que (26) et $a+c < -\frac{h}{2}$ les restringent. Prenant pour valeur moyenne de r le nombre $\frac{h^2}{12}$ et supposant $a=c=f=\frac{-h}{6}$, cet ensemble de a, c et f et des autres quantités satisfera quand, ayant calculé les valeures de (a^2+b^2), (c^2+d^2), (f^2+g^2) exprimées en fonction de ces grandeurs [voyez (15), (20) et (21)], ces valeurs réduisent le quotient de (17) divisée par (19) à l'identité. Nul autre ensemble ne satisfera.

Quand l'ensemble de a, c et f est fixé, l'ensemble de a^2+b^2, c^2+d^2 et f^2+g^2 l'est aussi, et il est évident qu'alors le calcul de b, d et g n'offre pas plus de difficulté. Prenons un exemple.

Soit:

$$x^6 - 14\,x^5 + 87\,x^4 - 296\,x^3 + 607\,x^2 - 714\,x + 441 = 0 \quad (27)$$

$(h=-14,\ k=87,\ l=-296,\ m=607\ n=-714,\ p=441)$ une équation à six racines complexes, alors $a+c+f=7$, la valeur moyenne de $a=c=f=\frac{7}{3}$, celle de $r=ac+af+cf=\frac{h^2}{12}=16$; ainsi r sera $= 18, 17, 16, 15, 14$ et $a+c<7$ sera $= 6, 5, 4, 3, 2, 1$ Cela suffit pour le moment.

Prenant l'inégalité (26)

$$r + (a+c)\left[\frac{h}{2} + \frac{3}{4}(a+c)\right] < 0, \quad (h=-14)$$

nous aurons :

$r = 18$, $a + c = 6, 5, 4, 3, 2, 1$ successivement, l'inégalité sera fausse
$r = 17$, $a + c = 6, 5, 4, 3, 2, 1$ » » » »
$r = 16$, $a + c = 6$ l'inégalité sera fausse
$a + c = 5$ » » correcte
$a + c = 4, 3, 2, 1$ » » fausse
$r = 15$, $a + c = 6$ » » »
$a + c = 5$ » » correcte
$a + c = 4$ » » »
$a + c = 3, 2, 1$ » » fausse
$r = 14$, $a + c = 6, 5, 4, 3$ » » correcte
$a + c = 2, 1$ » » fausse

Ainsi donc nous aurons la table suivante des ensembles

r	$a+c$	f	s	ac	$(a-c)^2$	a	c
16	5	2	12	6	1	3 2	2 3
15	5	2	5	$2\,^1/_2$	15	$\frac{5+\sqrt{15}}{2}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{2}$	$\frac{5-\sqrt{15}}{2}$ $\frac{5+\sqrt{15}}{2}$
15	4	3	9	3	4	3 1	1 3
14	6	1	8	8	4	2 4	4 2
14	5	2	8	4	9	4 1	1 4
14	4	3	6	2	8	$2+\sqrt{2}$ $2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$ $2+\sqrt{2}$
14	3	4	8	2	1	1 2	2 1

Les colonnes f et a resultant des équations (14) et (24).

Que prendre maintenant pour a, c et f?

Les équations (15), (20) et (21) exprimées en fonctions de ces grandeurs décideront; car il nous faut les valeurs de a, c et f qui, substituées dans le quotient de (17) divisée par (19), identifieront ce quotient; les autres valeurs de a, c et f ne sont rien pour l'équation (27).

Commençons par $r=16$, $a=3$, $c=2$, $f=2$, etc.; nous trouverons:

$$a^2+b^2=15,\ c^2+d^2=\frac{8+\sqrt{-92}}{2},\ f^2+g^2=\frac{8-\sqrt{-92}}{2}\ \textit{impossible.}$$

Pour $r=15$, $a=\frac{5+\sqrt{15}}{2}$, $c=\frac{5-\sqrt{15}}{2}$, $f=2$, nous aurons:

$$a^2+b^2=40+51\sqrt{15}\pm\sqrt{-266881-1240\sqrt{15}}\ \textit{impossible de même.}$$

Pour $r=15$, $a=2$, $c=1$, $f=3$ nous aurons:

$$a^2+b^2=\frac{25}{2}\pm\sqrt{\frac{625}{4}-207}\ \textit{impossible}$$

Pour $r=14$, $a=2+\sqrt{2}$, $c=2-\sqrt{2}$, $f=3$ nous aurons:

$$a^2+b^2=c^2+d^2=f^2+g^2=\infty\ \textit{encore impossible.}$$

Pour $r=14$, $a=2$, $c=4$, $f=1$ sera

$$(15)\qquad (a^2+b^2)+(c^2+d^2)+(f^2+g^2)=31\,,$$

$$(20)\qquad 3(c^2+d^2)+(a^2+b^2)=70\,,$$

$$(21)\quad (a^2+b^2)^2-\frac{160}{23}(a^2+b^2)-\frac{7}{23}=0,\ \text{d'où}\ a^2+b^2=7\ \text{ou}\ -\frac{1}{23}.$$

Puisque $a^2+b^2=-\frac{1}{23}$ ne peut pas satisfaire, nous aurons

$$a^2+b^2=7,\ c^2+d^2=21,\ f^2+g^2=3.$$

Substituons ces valeurs dans le quotient de (17) divisée par (19) avec $a=2$, $c=4$, $f=1$ naturellement, nous trouverons l'identité effectuée.

Puisque les équations (14)-(19) sont symétriques, tout autre arrangement de 2, 4 et 1 pour a, c, f satisfera à notre recherche, ainsi que prouve la table.

Quant aux quantités b, d et g, nous aurons:

$$b=\pm\sqrt{7-4}=\pm\sqrt{3}\quad d=\pm\sqrt{21-16}=\pm\sqrt{5}\quad g=\pm\sqrt{3-1}=\pm\sqrt{2}$$

où seul le signe $+$ est à prendre.

Les racines complexes sont donc :

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = 2 \pm \sqrt{-3}, \quad \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} = 4 \pm \sqrt{-5}, \quad \begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix} = 1 \pm \sqrt{-2}.$$

Certes : dans tous les cas l'examen ne sera pas si facile et des valeurs fractionnaires de r seront à examiner, mais en tous les cas l'examen de la table et les équations (14), (22) et (23) sont de beaucoup à préférer à la résolution correcte des equations, que la substitution de (15), (20) et (21) en (17) et (19) nous offre.

4.º *Huit racines complexes.* Difficultés nouvelles ; aussi je me bornerai aux observations suivantes pour le moment.

Considérons l'équation à huit racines complexes

$$x^8 + lx^7 + mx^6 + nx^5 + px^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0 \qquad (28)$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = a \pm bi, \quad \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} = c \pm di, \quad \begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix} = f \pm gi, \quad \begin{matrix} x_7 \\ x_8 \end{matrix} = h \pm hi.$$

En devéloppant $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_7)(x - x_8) = 0$, on aura les équations analogues de (14)-(19), savoir :

$$\left.\begin{aligned}
&2a + 2c + 2f + 2h = -l, \\
&\Sigma(a^2 + b^2) + 4\Sigma ac = m, \\
&2\Sigma(c + f + h)(a^2 + b^2) + 8\Sigma acf = -n, \\
&\Sigma(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + 4\Sigma(cf + ch + fh)(a^2 + b^2) + 4acfh = p, \\
&2\Sigma(f + h)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + 8\Sigma cfh(a^2 + b^2) = -r, \\
&\Sigma(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(f^2 + g^2) + 4\Sigma fh(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = s, \\
&2\Sigma h(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(f^2 + g^2) = -t, \\
&(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(f^2 + g^2)(h^2 + k^2) = u.
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Les équations analogues de (14), (22) et (23) seront

$$\left.\begin{aligned}
a + c + f + h = -\frac{l}{2}, \quad ac + af + ah + cf + ch + fh = v \\
acf + ach + afh + cfh = w, \quad acfh = \lambda,
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

v, w et λ étant les valeurs de ces groupes.

Mais c'est ici que se présentent les difficultés. Les équations (30) résolues comme (24) et (25) nous donnent à la fin deux équations en a et c, l'une en ac de $8^{\text{ième}}$ degré, l'autre en $a+c$ de premier degré. La table presentée ci-dessus ne peut pas être si aisément dresssée.

En effet, resolvant les équations (30) par la methode appliquée à (24) et (25) nous aurons, en éliminant entre elles premièrement h,

$$\left.\begin{aligned} ac+af+cf-(a+c+f)\times\left(\frac{l}{2}+a+c+f\right)&=v\,,\\ acf-(ac+af+cf)\left(\frac{l}{2}\pm a+c+f\right)&=w\,,\\ acf\left(\frac{l}{2}+a+c+f\right)&=-\lambda\,.\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

Puis éliminant entre (31) f, nous aurons:

$$\left.\begin{aligned} &\pm\sqrt{\left(\frac{2a+2c+l}{4}\right)^2-\frac{\lambda}{ac}}\\ &=\pm\sqrt{\left(\frac{2a+2c+l}{4}\right)^2-\frac{acl+2\,ac\,(a+c)+2\,w}{2\,(a+c)}}\\ \text{et}\qquad&\\ &-\frac{2a+2c+l}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{2a+2c+l}{4}\right)^2-\frac{\lambda}{ac}}\\ &=\frac{2a+2c+l}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{2a+2c+l}{4}\right)^2-ac+(a+c)\times\left(a+c+\frac{l}{2}\right)+v}\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

La première se réduit à:

$$a+c=-\frac{ac\,(acl+2w)}{2\,(\lambda-a^2c^2)}\,,\qquad(33)$$

la seconde à:

$$\left.\begin{aligned} &[2(a+c)+l]^4+8(a+c)[2(a+c)+l]^3-[16(ac-v)+\{4(a+c)+l\}^2]\\ &\times[2\,(a+c)+l]^2-8\left(v-\frac{a^2c^2-\lambda}{ac}\right)[4\,(a+c)+l][2\,(a+c)+l]\\ &-\frac{16\,(a^2c^2-\lambda)}{ac}\times\frac{a^2c^2-\lambda-2\,acv}{ac}-16\,v^2=0\,.\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

Les (34) et (34) sont analogues à (25) et (27), mais il y a une différence: car (25) est de premier degré, la (33) est de deuxième degré et il a y les deux lettres w et λ aux groupes (30) tandis que à (25) il n'a qu'une, savoir r. Aussi écrivant pour (33)

$$ac = \frac{-w \pm \sqrt{w^2 + 4\lambda(a+c)(a+c+l)}}{2(a+c+l)}, \qquad (35)$$

on aura

$$w^2 + 4\lambda(a+c)(a+c+l) > 0,$$

et

$$(a+c)^2 - 4ac > 0$$

ou

$$(a+c+l)(a+c)^2 + 2w \mp 2\sqrt{w^2 + 4\lambda(a+c)(a+c+l)} > 0$$

et

$$(a+c) < -\frac{l}{2}(l<0).$$

En comparant les inégalités du n° 3° avec celles-ci on trouvera bien de différences qui guideront nos pas. Pour w il faudra prendre $-\frac{l^3}{128}$, pour λ il faut prendre $+\frac{l^4}{4096}$ comme moyennes valeurs.

La chose qui est ici en avantage c'est que, vu que les racines complexes sont plus nombreuses, la valeur moyenne peut être plus correcte.

Ayant limité les valeurs de a et c, nous calculons f par l'égalité $acf\left(\frac{l}{2} + a + c + f\right) = -\lambda$, puis h par l'égalité $a + c + f + h = -\frac{l}{2}$.

Cet ensemble — on en aura quelques-uns — fixé, on cherchera parmi les équations (29) celles qui rendent facile le calcul de $a^2 + b^2$, $c^2 + d^2$, $f^2 + g^2$ et $h^2 + k^2$. Certainement on aboutira à une équation surpassant le deuxième degré. En ce cas il faut la resoudre par la méthode des racines réelles, et (comme au n° 3) ce seront ces a, c, f et h, qu'il nous faut, qui satisferont le meilleur aux trois équations (29), qu'on n'a pas mis encore dans le calcul. Après a, c, f et h, on calculera les b, d, g et k comme en 3°.

5° *Pour plus de huit racines complexes* — chose se présentant probablement très rarement — après avoir calculé les équations (29) et (30), qui seront de plus en plus compliquées, il faut y

substituer directement les valeurs moyennes, provanant de $a = c = f = \ldots = -\frac{l}{n}$, puis calculer les a, c, $f \ldots$ etc. et en faire un ensemble avec lequel on calcule de nouveau les groupes $ac + af + ag + \ldots$, $acf + ach + \ldots$, etc., à fin de corriger leurs valeurs moyennes. Alors, plus sont multiples les racines complexes, plus sont justes les valeurs moyennes. Après cela on calculera $a^2 + b^2$, $c^2 + d^2 \ldots$

En tout cas: par *les équations des groupes* le problème est réduit à plus grande simplicité.

SOBRE UNA CURVA TRANSCENDENTE, GENERALIZACION DE LA TRACTRIZ DE LEIBNIZ

POR

D. JUAN DURÁN-LORIGA

En el Congreso celebrado en Valencia (Mayo de 1910) por la «Asociacion Española para el Progreso de las Ciencias», hemos presentado, entre otros varios trabajos, uno destinado á estudiar la curva que tiene por ecuacion:

$$x = -\frac{\cos\theta}{2} y \pm k \left[\sqrt{1 - \frac{y^2}{q^2}} + \log \text{nep.} \frac{q - \sqrt{q^2 - y^2}}{y} \right] \qquad (1)$$

en la cual θ representa el angulo de los ejes cartesianos y k y q dos constantes ligadas por la igualdad

$$q = \frac{2k}{\sqrt{4 - \cos^2\theta}}.$$

Esta curva transcendente goza de la propriedad caracteristica de que la *suma de los cuadrados de los lados* de los triangulos formados por la *tangente,* la *ordenada* y la *subtangente* es una cantidad constante. El estudio de esta curva lo propusimos, primeiro en el *Journal de Longchamps,* y despues en el *Intermédiaire des Mathématiciens* (años 1897 y 1902), pero la cuestion no tuvo respuesta. El eminente analista, e ilustre amigo nuestro, Señor GOMES TEIXEIRA, ha tenido la bondad de citar nuestra curva en su magnifico *Tratado de curvas especialés* y esto nos impulsa a dar à conecer nuestro estudio en esta Revista, pero adicionando algo al trabajo presentado en Valencia.

I. Ante todo veamos como hemos llegado á la ecuacion (1) Se tiene (fig. 1)

$$\overline{PT}^2 = y^2 \cdot \frac{\overline{dx}^2}{\overline{dy}^2}, \quad \overline{MT}^2 = y^2 + y^2 \cdot \frac{\overline{dx}^2}{\overline{dy}^2} + 2\, y^2 \frac{dx}{dy} \cos\theta,$$

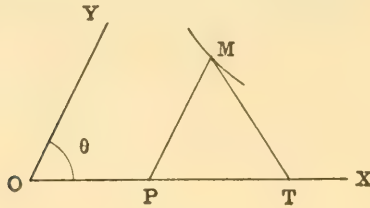



Fig. 1

y por consiguiente, si llamamos $2\,k^2$ á la constante, se verificara:

$$y^2 \left(1 + \frac{\overline{dx}^2}{\overline{dy}^2}\right) + y^2 \frac{dx}{dy} \cos\theta = k^2,$$

de donde resulta

$$dx = -\frac{\cos\theta}{2}\, dy \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2\theta}{4} \left(\sqrt{\frac{\frac{4\,k^2}{1 - \cos^2\theta}}{y^2} - 1} \right)}\, dy$$

y haciendo por abreviar

$$\frac{4\,k^2}{1 - \cos^2\theta} = q^2$$

é integrando se obtiene:

$$x = -\frac{\cos\theta}{2}\, y \pm \frac{k}{q} \int \left(\sqrt{\frac{q^2}{y^2} - 1} \right) dy,$$

pero

$$\int \left(\sqrt{\frac{q^2}{y^2} - 1} \right) dy = \sqrt{q^2 - y^2} + q \log \text{nep} \frac{q - \sqrt{q^2 - y^2}}{y},$$

y resulta por consiguiente la ecuacion de la curva que al principio hemos escrito.

Si en la ecuacion (1) suponemos $\theta = \frac{\pi}{2}$, y se observa que en

este caso $q = k$, resulta la ecuacion

$$x = \pm \left[\sqrt{k^2 - y^2} + k \log \text{nep} \frac{k - \sqrt{k^2 - y^2}}{y} \right],$$

que representa la *Tractriz de Leibniz*, que como se sabe goza de la propriedad de ser constante la porcion de tangente comprendida entre el punto de contacto y una recta dada (eje de abscisas en este caso). Es natural que se haya llegado á este resultado, pues siendo ahora rectangulo el triangulo formado por la tangente, la ordenada y el eje de abscisas, pedir que sea constante la suma de los cuadrados de los lados es sencillamente exigir que lo sea la longitud de la hipotenusa, es decir la tangente. — Es bien sabido que la tractriz, la encontró el gran geometra aleman al tratar de resolver el problema, de hallar la linea descripta por un punto que se dirije á otro tambien movil, pero en linea recta, de modo que sea constante la distancia entre ambos.

Vamos ahora á estudiar la curva representada por la ecuacion (1), y lo primero que salta á la vista, es, que la recta que tiene por ecuacion:

$$x = -\frac{\cos\theta}{2} y$$

es un diametro conjugado con la direccion que señala el eje de los x; asi, se obtendran los distintos puntos de la curva, tomando en las paralelas á dicho eje, en uno y otro sentido y á partir de los puntos en que cortan al diametro, longitudes iguales al valor que toma el segundo termino de la ecuacion (1), para el valor asignado á la ordenada de cada paralela.

Como el mayor valor que puede ricibir y es q y ademas no puede tomar valores negativos, resulta que la curva queda comprendida entre el eje de las x y su paralela de ordenada q.

Para $y = q$ el corchete toma el valor cero, asi, la curva corta al diametro en el punto que tiene por coordenadas

$$x = -\frac{q \cos\theta}{2}, \quad y = q.$$

Como para $y = 0$, x toma el valor $\pm\infty$, puesto que la cantidad que aparece bajo el logaritmo neperiano toma el valor cero (despues de salvar la indeterminacion que se presenta) resulta que el eje de las x es una asintota de la curva, cuyas

dos ramos vuelven su convexidad hacia el diametro, afectando la forma que se vè en la fig. 2.

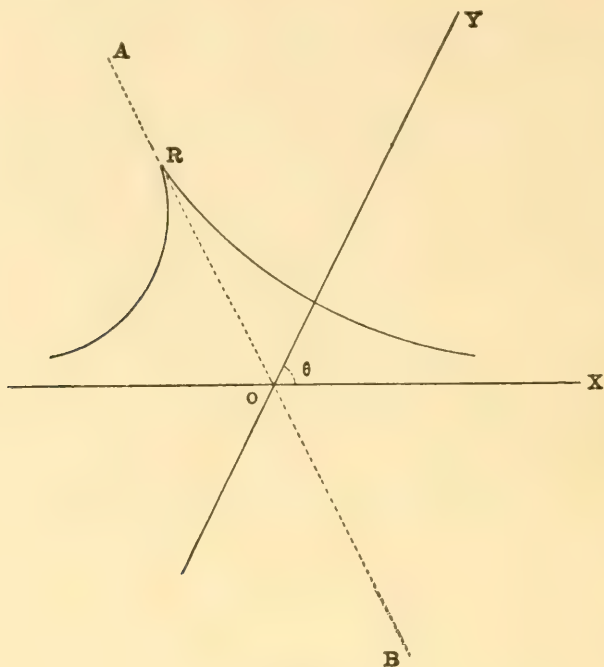



Fig. 2

De la ecuacion diferencial

$$dx = dy\left(-\frac{\cos\theta}{2} \pm \frac{k}{q}\sqrt{\frac{q^2}{y^2} - 1}\right)$$

deducimos para el coeficiente angular de la tangente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-\frac{\cos\theta}{2} \pm \frac{k}{q}\sqrt{\frac{q^2}{y^2} - 1}}$$

como para el valor $y = q$ se convierte en:

$$-\frac{2}{\cos\theta}.$$

es decir él mismo que el del diametro, resulta que este es tangente en el vértice, que es por consiguiente, un punto de retroceso de primera especie.

Vamos ahora á encontrar el area compreendida entre la curva, el eje de abscisas y dos paralelas al de ordenadas.

La ecuacion diferencial del area es:

$$du = ydx \operatorname{sen} \theta = y \frac{dx}{dy} . dy \operatorname{sen} \theta$$

y como

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\cos \theta}{2} + \frac{k}{q} \sqrt{\frac{q^2}{y^2} - 1}$$

(hemos tomado el signo positivo considerando la rama de la izquierda), resulta

$$du = -\frac{y}{2} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, dy + \frac{k}{q} \operatorname{sen} \theta \sqrt{q^2 - y^2} . dy ,$$

pero

$$\int \sqrt{q^2 - y^2} \ldots dy = \frac{q^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{q} + \frac{y}{2} \sqrt{q^2 - y^2} + \text{constant}$$

y tambien

$$\int y \, dy = \frac{y^2}{2} + \text{constante} ,$$

luego

$$\mathrm{U} = -\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} \left(\frac{y_1^2 - y_0^2}{2} \right) + \frac{k}{q} \operatorname{sen} \theta \left[\frac{q^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{y_1}{q} \right.$$

$$\left. + \frac{y_1}{2} \sqrt{q^2 - y_1^2} - \frac{q^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{y_0}{q} - \frac{y_0}{2} \sqrt{q^2 - y_0^2} \right] .$$

Si se considera en particular el area comprendida entre el eje de las x y la paralela al de las y trazada por el vertice, se obtiene

$$\mathrm{U} = -\frac{q^2}{8} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\pi q k}{4} \operatorname{sen} \theta .$$

Si á esta, añadimos la del triangulo formado por el vertice, el origen, y el pié de la ordenada de dicho vértice, se tendrá el area compreendida entre la rama isquierda de la curva, el eje de los x y el diametro, pero facilmente se ve que el area del

citado triangulo tiene por expresion

$$\frac{q^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{4} = \frac{q^2}{8} \operatorname{sen} 2\theta,$$

resulta pues para el area en cuestion:

$$\frac{\pi qk}{4} \operatorname{sen} \theta$$

y para la comprendida entre *toda la curva* y el eje de los x

$$A = \frac{\pi qk}{2} \operatorname{sen} \theta .$$

Si en esta ecuacion suponemos $\theta = \frac{\pi}{2}$, en cuyo caso la curva se convierte, segun hemos dicho, en la *Tractriz de Leibniz*, y se tiene en cuenta que ahora $q = k$, resulta para el area

$$A = \frac{\pi k^2}{2},$$

que es en efecto la conocida para la tractriz.

Puede determinarse con facilidad, graficamente, el vértice de la curva. Supongamos la cantidad k dada por un segmento rectilineo. De la igualdad

$$\frac{4 k^2}{4 - \cos^2 \theta} = q^2,$$

se deduce

$$(2 k)^2 = (2 q)^2 - (q \cos \theta)^2.$$

Si llamamos α un angulo que cumpla la condicion que

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \cos \theta,$$

se obtiene

$$k^2 = q^2 - (q \cos \alpha)^2$$

ò bien

$$k = q \operatorname{sen} \alpha;$$

construyendo pues un triangulo rectangulo en el que uno de

los catetos sea k y el angulo opuesto α la hipotenusa serà el segmento q, ordenada del vértice de la curva. — La abscisa hemos dicho tiene por valor

$$-\frac{q\cos\theta}{2}$$

ò bien

$$-q\cos\alpha;$$

se tiene pues immediatamente el vértice.

Tambien es facil construir la tangente en un punto cualquiera, pues si ABC (fig. 3) es el triangulo formado por la ordenada AB, la tangente AC y la subtangente BC se tiene:

Fig. 3

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2k^2,$$

$$b^2 = 2k^2 - a^2 - c^2,$$

y como ademas

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta,$$

resulta finalmente

$$a^2 - ac\cos\theta + c^2 - k^2 = 0,$$

que dà la subtangente a por la aplicacion repetida del teorema de Pitagoras.

II. La curva que hemos venido estudiando goza segun hemos dicho de la propriedad de que el triangulo formado por la *tangente,* la *ordenada* y la *subtangente* conserva constante la suma de cuadrados de los lados. — A la mitad de esta suma:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

la hemos llamado en un articulo publicado en el *Progreso Matematico,* el año 1894, *potencia del triangulo,* y á las cantidades:

$$p_a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad p_b = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, \quad p_c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

potencias parciales relativas á los vértices A, B y C.

Estas denominaciones han sido adoptadas despues por varios geometras españoles ([1]).

Veamos ahora la razon de las denominaciones que hemos ideado.

Si consideramos en un triangulo las potencias de los vértices respecto á las circunferencias descriptas sobre los lados opuestos como diametros obtendremos las expresiones que hemos representado por p_a, p_b y p_c. Asi por ejemplo (fig. 4) para el vértice A se tiene

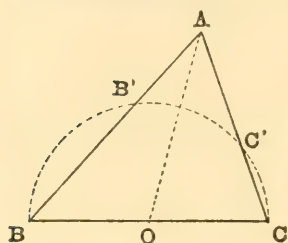



Fig. 4

$$\text{Potencia} = AB' . AB = m_a^2 - \frac{a^2}{4},$$

y poniendo en lugar de m_a (mediana) su valor en funcion de los lados, es decir

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{2},$$

resulta

$$p_a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Si se sumam los valores de las tres *potencias parciales,* se obtiene:

$$p_a + p_b + p_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

es decir la cantidad P à que hemos llamado por esta razon *potencia total del triangulo.*

Cuando varios triangulos tienen la misma *potencia total,* decimos que son *equipotenciales.* — Con esta denominacion podemos decir que en la curva anteriormente considerada, los triangulos á que hemos aludido son equipotenciales.

En la *Geometria reciente del triangulo,* se presentan con gran frecuencia las expresiones que hemos representado por P, p_a, p_b y p_c, es decir la *potencia total* y las *potencias parciales* y su consideracion simplifica muchas formulas, ya haciendo mas

---

([1]) Veanse la «Geometria Metrica» y la «Geometria de Posicion» de los SS. Gimenez Rueda y Torroja, Catedraticos en la Universidad de Madrid, y el «Tratado de Geometria» del Coronel de Ingenieros Señor Ortega de texto para el ingreso en las Academias Militares.

sencilla su estructura, ya facilitando su relacion, y no por la substitucion de letras convencionales como abreviacion de los trinomios, sino por cantidades que tienen completa interpretacion geometrica y pueden figurar como elementos del triangulo, para la resolucion de problemas que pueden proponerse, haciendolas entrar como dados.

Lo enunciacion de algunos teoremas adquiere una forma mas sencilla asi, por ejemplo el fundamental de los triangulos oblicuangulos, que expresan las siguientes igualdades:

$$p_a = bc \cos A\ , \quad p_b = ac \cos B\ , \quad p_c = ab \cos C\ ,$$

se reduce à decir que en todo triangulo la *potencia de un vértice es igual al producto de los lados que en el concurren por el coseno del angulo que forman,* siendo por consiguiente la potencia, positiva, nulla, ú negativa, segun que el angulo sea agudo, recto ú obtuso, como se deduce immediatamente de la definicion geometrica.

Es tambien facil obtener las curiosas relaciones siguientes, que se pueden traducir con sencillez al lenguage ordinaria:

$$P^2 + p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 = a^4 + b^4 + c^4\ ,$$

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{p_b}{p_c}\ ,$$

$$\frac{ap_a}{\cos A} = \frac{bp_b}{\cos B} = \frac{cp_c}{\cos C}\ .$$

La altura de un triangulo en funcion de las potencias de los vértices tiene por expresion:

$$h_a = \frac{1}{a}\sqrt{p_a p_b + p_b p_c + p_a p_c}$$

y por consiguiente el area

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{p_a p_b + p_b p_c + p_a p_c}\ .$$

De las definiciones dadas y de fórmulas muy conocidas relativas à los triangulos se deducen facilmente varias propriedades. — Citaremos las siguientes:

1ª En los triangulos equivalentes y equipotenciales, el angulo de Brocard es constante.

2ª Si se fijan las potencias de dos vértices (con lo que se determina un lado), el lugar geometrico del tercero es una perpendicular á dicho lado.

3ª Si se fija la potencia total y la de un vértice (con lo que tambien se determina un lado), el lugar geometrico del tercer vértice es una circunferencia.

4ª Si un triangulo, variando de forma y posicion, se mantiene inscripto en una circunferencia, pero moviendose el centro de gravedad según otra concentrica, se conserva equipotencial.

5ª Una propriedad análoga se verifica respecto al ortocentro.

6ª Cuando un triangulo conserva un angulo fijo en magnitud y posicion y constante la potencia del vértice, el tercer lado envuelve una hipérbola.

7ª Si varios triangulos son equipotenciales, tambien lo son entre si los formados con sus medianas.

8ª Cuando varios triangulos equipotenciales son inscriptibles en una misma circunferencia, se verifica: 1º La suma de los cuadrados de las distancias del centro de ésta á los lados es constante. 2º Lo mismo sucede respecto á la suma de los cuadrados de los radios de los circulos inscripto y exinscriptos. 3º Los ejes orticos de todos estos triangulos son tangentes á una misma circunferencia.

9ª Si varios triangulos son equipotenciales y equivalentes, la suma de los inversos de los cuadrados de los radios de los circulos inscripto y exinscriptos es constante.

10ª Cuando un triangulo manteniendose inscripto en una ciacunferencia, pivotea alrededor de un vértice conservando fija la potencia en este punto, el tercer lado es tangente á una conica y las alturas que corresponden á los vértices moviles son tangentes á una parabola.

11ª Si en un triangulo ABC, dos vértices B y C recorren una circunferencia O, el tercero conserva fija su potencia y la altura correspondiente á este pasa por un punto invariable h' de BC, el vértice A describe una circunferencia de centro h'.

12ª Si llamamos p_1 y S_1 al semiperimetro y al area, respectivamente, del triangulo polar reciproco, ó tangencial de uno dado, se verifican las relaciones

$$S_1 = \frac{PS}{2}\left(\frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_b} + \frac{1}{p_c} - \frac{1}{P}\right),$$

$$2\,p_1 = \left(\frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_b} + \frac{1}{p_c}\right)\sqrt{(P-p_a)(P-p_b)(P-p_c)}\,.$$

III. Hemos visto que la curva transcendente, que hemos estudiado, es una generalizacion de la *Tractriz de Leibniz* y en este concepto seria curioso ver en que forma *pueden generalizarse* ciertas propriedades conocidas de la *Tractriz;* citaremos como ejemplo las siguientes:

1ª La tractriz puede definirse como trajectoria ortogonal de circulos de radio constante cuyos centros estan sobre uno de los ejes de coordenadas.

2ª La tractriz se puede engendrar por la rodadura de una parábola sobre una recta considerando un cierto punto ligado á esta lineas.

3ª La tractriz es la curva orthoptica de dos logarithmicas $y = e^{x}$, $y = e^{-x}$ cortando-se sobre Oy en angulo recto.

4ª La tractriz girando alrededor de su asintota engendra la seudoesfera de Beltrami.

La Coruña.

ESSAI D'UNE THÉORIE ANALYTIQUE DES LIGNES NON-EUCLIDIENNES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

à Rome

(Suite)

§ 16

Cône, oricône, hypercône, canal. — Le cône est la surface engendrée par une droite mobile, sous les conditions d'avoir un point fixe *(sommet)* et de s'appuyer à une ligne quelconque *(directrice).*

Dans l'espace riemannien il n'y a évidemment qu'une seule espèce de cônes.

Dans l'espace lobatschewskien au contraire il y a trois espèces de cônes, suivant que le sommet est:

1° — un point réel à distance finie *(cône propre)*

2° — un point réel à l'infini *(oricône* ou *cylindre)*

3° — un point idéal *(hypercône).*

On peut réaliser la construction de l'oricône ou de l'hypercône, en conduisant par les points successifs d'une ligne quelconque, des droites respectivement parallèles à une droite fixe, ou perpendiculaire à un plan fixe.

A un point quelconque O d'un plan α contenant une ligne arbitraire L, élevons la perpendiculaire r, et construisons ensuite les plans rOA, rOB, rOC, ... passant par r et par les points successifs A, B, C, ... de L. — Si l'on construit sur ces plans les hypercycles a, b, c, ... d'axe commun r et d'hauteurs respectives OA, OB, OC, ..., le lieu de ces hypercycles est une surface que l'on appelle *canal.* La ligne L est la *section droite* et la droite r l'*axe.*

Le canal dont la section droite est un cercle et l'axe une droite passant au centre, se dit *circulaire* ou *de révolution,* car il peut être engendré par la rotation d'un hypercycle autour de sa base. — Telle surface est le lieu des points de l'espace dont la distance à une droite fixe *(axe)* est un segment constant *(rayon).*

Remarquons que, comme l'hypercycle riemannien est un cercle propre, le canal riemannien revient à un lieu de cercles propres, dans le cas général; à un tore, dans le cas particulier que le canal soit circulaire.

Voici une autre génération du canal générique: Une ligne plane quelconque L est assujettie à un mouvement de translation, sous la condition qu'un point O de son plan décrive une droite perpendiculaire à ce plan. La ligne mobile L, considérée dans ses positions successives, est évidemment la section droite du canal, et la droite décrite par le point O en est l'axe.

Le canal euclidien se réduit évidemment à un cylindre.

§ 17

Surface de révolution. — Les coordonnées ($\xi = \operatorname{tg} x$, $\eta = \operatorname{tg} y$, $\zeta = \operatorname{tg} z$) d'un point quelconque A d'une ligne riemannienne L sont exprimables par les équations

$$(9) \qquad \xi = \operatorname{tg} \rho . \cos \omega , \quad \eta = \operatorname{tg} \rho . \sin \omega , \quad \zeta = \operatorname{tg} \Omega ,$$

ρ et Ω étant des fonctions connues de ω.

Faisons tourner la ligne L autour de l'axe Oz d'un angle arbitraire v, dans la direction même où l'on compte l'angle polaire ω. Au but d'une telle rotation le point A passe dans la nouvelle position A_1, en décrivant l'arc circulaire AA_1, dont le plan est perpendiculaire à l'axe et le centre est un point M de cet axe.

Or si l'on désigne par X, Y, Z les tangentes circulaires des coordonnées cartésiennes du point A_1, on a (§ 2):

$$\sin MA = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} , \quad \sin MA_1 = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2 + Z^2}} ,$$

et la condition $MA = MA_1$ revient à l'autre

$$\frac{1 + Z^2}{X^2 + Y^2} = \frac{1 + \zeta^2}{\xi^2 + \eta^2} .$$

En remarquant que $\zeta = Z = \mathrm{tg}\,\mathrm{OM}$, l'équation ci-dessus se dédouble ainsi

$$X^2 + Y^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad Z = \zeta.$$

Et comme ces conditions sont vérifiées aussitôt que l'on pose

$$(10) \qquad \begin{cases} X = \xi \cos v - \eta \sin v = \mathrm{tg}\,\rho \,.\, \cos(\omega + v), \\ Y = \xi \sin v + \eta \cos v = \mathrm{tg}\,\rho \,.\, \sin(\omega + v), \\ Z = \zeta = \mathrm{tg}\,\Omega, \end{cases}$$

on conclut que *les coordonnées d'un point quelconque de la surface engendrée par la rotation de la ligne* (9) *autour de l'axe des z, sont exprimées par les équations* (10).

La génératrice L, considérée dans ses positions successives, est représentée par l'équation $v = \mathrm{const.}^e$ — Les parallèles sont représentés par l'équation $t = \mathrm{const.}^e$, ou par l'autre $\omega = \mathrm{const.}^e$, suivant que l'on définit la surface á l'aide des premières ou des deuxièmes équations (10).

Si l'on coupe la surface (10) par le plan $Y = 0$, on trouve pour expression des coordonnées (ξ_0, ζ_0) d'un point quelconque de la courbe section

$$(11) \qquad \xi_0 = \sqrt{X^2 + Y^2} = \mathrm{tg}\,\rho, \quad \zeta_0 = Z = \mathrm{tg}\,\Omega.$$

Ces équations définissent le méridien de la surface.

Remarque. — On reconnait des équations (10) que l'*image euclidienne d'une surface de révolution est une autre surface de révolution* (Propriété connue — § 13).

Considérons maintenant la ligne définie par les équations

$$(12) \qquad \xi = \mathrm{tg}\,\rho \,.\, \cos\varphi(\omega), \quad \eta = \mathrm{tg}\,\rho \,.\, \sin\varphi(\omega), \quad \zeta = \mathrm{tg}\,\Omega,$$

où $\varphi(\omega)$ est une fonction arbitraire de ω.

Si l'on fait tourner cette ligne autour de l'axe des z, on reconnait tout de suite que la surface que l'on engendre a pour méridien la ligne (11). D'ici le résultat: *Quelle que soit la forme de la fonction* $\varphi(\omega)$, *les équations* (12) *définissent une ligne décrite sur la surface de révolution engendrée par la rotation de la ligne* (9) *autour de l'axe des z.*

Dans l'espace lobatschewskien on a des résultats analogues.

§ 18

Hypercône de révolution. — Prenons pour méridien de la surface une droite AB du plan xz, perpendiculaire à l'axe Ox. Si du point B (x, z) de cette droite on abaisse la perpendiculaire BC à l'axe Oz, le quadrilatère trirectangle AOCB donne (Première Partie — § 3)

$$\text{th BC} = \text{th OA} \,.\, \text{ch OC} = \text{th}\, r \,.\, \text{ch}\, z\,, \tag{13}$$

r étant la distance entre O et le point A où le méridien rectiligne coupe l'axe Ox.

D'ailleurs la distance Δ d'un point quelconque (x, y, z) de la surface à l'axe Oz est définie par la formule (§ 2)

$$\text{th}\,\Delta = \frac{\sqrt{\text{tg}^2 x + \text{th}^2 y}}{\sqrt{1 - \text{th}^2 z}} = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{14}$$

Il suffit alors d'identifier les expressions de th BC et th Δ, en remarquant en outre que $\text{th}\, z = \zeta$, pour voir que l'*hypercône de révolution ayant pour axe l'axe des* z *et pour section droite le cercle de rayon* r *décrit sur le plan coordonné* z = 0, *est représenté par l'équation*

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{th}^2 r\,. \tag{15}$$

L'hypercône, considéré comme un cône à sommet idéal, existe seulement dans l'espace lobatschewskien; mais conçù comme *le lieu d'une suite de droites perpendiculaires à un plan fixe le long d'une ligné donnée, existe aussi dans l'espace riemannien.*

Dans le cas particulier que cette surface soit de révolution autour de l'axe des z, son équation est de la forme

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{tg}^2 r\,. \tag{15'}$$

Les considérations que l'on vient de faire au § 11, appliquées aux équations (15), (15'), démontrent que *les images des hypercônes non-euclidiens sur l'espace euclidien, sont des cylindres de révolution.*

§ 19

Oricône de révolution. — Si AB est une droite du plan xz parallèle à l'axe Oz, en rappelant les résultats du § 12 (Première

Partie), on trouve que l'équation (13) est ici remplacée par l'autre

$$\text{th}\, BC = \text{th}\, r\,(\text{ch}\, z - \text{sh}\, z) = \text{th}\, r \sqrt{\frac{1 - \text{th}\, z}{1 + \text{th}\, z}} = \text{th}\, r \,.\, \sqrt{\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}}.$$

En identifiant les expressions de th BC et th Δ, on obtient l'équation

$$(16) \qquad \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 \,.\, \text{th}^2 r + 2\zeta \,.\, \text{th}^2 r = \text{th}^2 r\,.$$

Elle définit à la fois l'oricône de révolution et son image sur l'espace euclidien.

Mais comme dans cet espace, (16) est l'équation de la surface de révolution dont le méridien est la droite

$$(17) \qquad \xi_0 = \pm(\zeta_0 - 1)\, \text{th}\, r\,,$$

on conclut que l'*oricône de révolution a pour image euclidienne un cône de révolution.*

Cette propriété réduit évidemment l'étude de l'oricône à l'étude du cône de révolution ordinaire.

Développement de l'oricône. — Si l'on coupe l'oricône le long d'une génératrice rectiligne AB, et que l'on étale ensuite la surface sur un plan, on obtient un faisceau de rayons ayant le centre réel à l'infini.

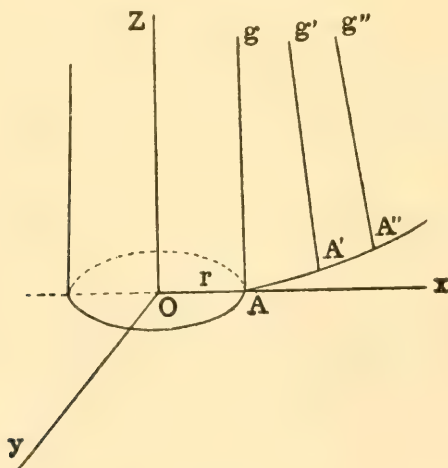



Fig. 6

Les sections circulaires que l'on obtient en coupant l'oricône

par des plans normaux à l'axe, deviennent des trajectoires orthogonales aux rayons du faisceau, c'est-à-dire des oricycles concentriques. Or comme l'oricycle est une ligne à courbure constante (Troisième Partie), on a sans plus que *les parallèles de l'oricône de révolution sont des lignes à courbure géodésique constante* (¹).

Soit un oricône de révolution autour de l'axe Oz et ayant la base (circulaire) de rayon $OA = r$ sur le plan $z = 0$.

$AB \equiv g$ étant une des génératrices que l'oricône a sur le plan xz, construisons sur ce plan une suite de droites g', g'', ... parallèles à l'axe Oz, et l'oricycle $AA'A''$ ... passant par A et orthogonal à ces droites. — Si l'on enroule le plan xz sur la surface de l'oricône, en faisant en sorte que cet oricycle se superpose à la base, les droites g, g', g'', ... vont naturellement coïncider avec les génératrices successives de l'oricône, et une figure plane quelconque se réduit à une certaine figure oriconique.

Cette méthode peut être utilisée dans la construction de certaines lignes oriconiques. Ainsi par exemple pour avoir une *hélice* ou une *géodésique* de l'oricône, il suffit d'employer la construction ci-dessus, en supposant que la figure plane initiale soit respectivement une trajectoire isogonale du système des droites g, ou une droite.

§ 20

Canal circulaire. — En supposant $\Delta = \text{constante} = \delta$ dans les équations (7), (7′) du § 2, on trouve les équations

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 \,.\, \mathrm{tg}^2\,\delta = \mathrm{tg}^2\,\delta \qquad (18) \quad \text{(dans l'espace r.)}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \,.\, \mathrm{th}^2\,\delta = \mathrm{th}^2\,\delta \qquad (18') \quad \text{(dans l'espace l.)}$$

Celles-ci démontrent que *le canal circulaire* $\left\{\begin{array}{l}\textit{riemannien}\\ \textit{lobatschewskien}\end{array}\right\}$, *ainsi que son image sur l'espace ordinaire, est une* $\left\{\begin{array}{l}\textit{hyperboloïde réglée}\\ \textit{ellipsoïde}\end{array}\right\}$ *de révolution.*

Les canaux circulaire, lobatschewskien ou riemannien, sont donc des surfaces à points respectivement elliptiques ou hyperboliques. Les droites *réelles* tracées sur le deuxième canal sont rangées en deux systèmes, jouissant de mêmes propriétés du

(¹) Cette propriété subsiste pour les parallèles de toute surface de révolution (Deuxième Partie, § 67).

double système des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe de l'espace ordinaire.

Les méridiens des surfaces de révolution, images euclidiennes des canaux (18), (18'), ont pour équations

$$(19) \qquad \xi_0^2 - \zeta_0^2 \,.\, \mathrm{tg}^2\,\delta = \mathrm{tg}^2\,\delta, \quad \xi_0^2 + \zeta_0^2 \,.\, \mathrm{th}^2\,\delta = \mathrm{th}^2\,\delta.$$

Mais comme ces équations et les (2) du § 10 définissent *même conique*, où les axes sont simplement invertis, on a le théorème : *Les hyperboloïdes de révolution à une et à deux nappes, images euclidiennes du canal circulaire riemannien de rayon δ, et de l'hypersphère riemannienne d'hauteur δ, sont engendrés par même hyperbole, tournant respectivement autour de l'axe transverse et de l'axe non-transverse.*

En rappelant donc le lien existant entre les deux hyperboloïdes de l'espace ordinaire, on voit que *toute propriété démontrée pour l'hypersphère ou le canal circulaire riemannien, donne tout de suite une propriété analogue pour l'autre surface.*

Remarquons enfin que, si l'on fait usage des coordonnées géographiques, le canal circulaire de rayon δ [en vertu des relations (10), (10') du § 3] est représenté par une des équations

$$\cos^2 w\,(\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v) = \sin^2 \delta\,,$$

$$\cos^2 w\,(\sin^2 u + \sin^2 v - \sin^2 u \sin^2 v) = \sin^2 \delta$$

dans l'espace riemannien, et

$$\mathrm{ch}^2 w\,(\mathrm{sh}^2 u\, \mathrm{ch}^2 v + \mathrm{sh}^2 v) = \mathrm{sh}^2 \delta\,,$$

$$\mathrm{ch}^2 w\,(\mathrm{sh}^2 u + \mathrm{sh}^2 v + \mathrm{sh}^2 u\, \mathrm{sh}^2 v) = \mathrm{sh}^2 \delta$$

dans l'espace lobatschewskien.

§ 21

Vu que le canal circulaire riemannien est une particulière hyperboloïde à une nappe, on peut se proposer la question de *chercher les conditions sous lesquelles on doit faire tourner une droite autour d'un axe, pour qu'elle engendre une de telles surfaces.*

Soit g la droite coupant perpendiculairement l'axe Ox au point O_1 distant δ de l'origine O, et faisant l'angle ε avec le plan xz.

Les coordonnées (ξ, η, ζ) d'un point quelconque de cette

droite ont évidemment pour expressions

$$(20) \qquad \xi = \operatorname{tg} \delta , \quad \eta = \operatorname{tg} \delta \,.\, \operatorname{tg} \omega , \quad \zeta = \cot \varepsilon \,.\, \operatorname{tg} \delta \,.\, \operatorname{tg} \omega ,$$

ω étant l'angle polaire sur le plan $z = o$, compté à partir de l'axe Ox.

Il s'ensuit que le méridien de l'hyperboloïde engendrée par la droite g dans la rotation autour de l'axe Oz, a pour méridien la conique

$$(21) \qquad \xi_0^2 - \zeta_0^2 \,.\, \operatorname{tg}^2 \varepsilon = \operatorname{tg}^2 \delta .$$

L'identification de l'équation (21) à la première (19) démontre que *pour que la droite riemannienne* (20), *dans la rotation autour de l'axe des* z, *engendre un canal circulaire, il est nécessaire et suffisant que les quantités* δ, ε *soient égales entre elles.*

§ 22

Canal générique. — En rappelant ce que l'on vient de dire au § 16, prenons pour axe du canal l'axe des z, et pour section droite la ligne L du plan coordonné $z = o$ définie par l'équation

$$(22) \qquad \rho = f(\omega)$$

en coordonnées polaires.

Pour avoir les coordonnées (ξ, η, ζ) d'un point quelconque du canal générique, il suffit de rappeler l'équation (18) du canal circulaire, en remplaçant ici la constante δ par la variable ρ. On obtient ainsi

$$\xi^2 + \eta^2 = (1 + \zeta^2) \,.\, \operatorname{tg}^2 \rho .$$

Mais comme

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\eta}{\xi} ,$$

il résulte

$$\rho = f(\omega) = f\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi}\right) ,$$

et l'équation précédente revient à l'autre

$$(23) \qquad \xi^2 + \eta^2 = (1 + \zeta^2) \operatorname{tg}^2 \left[f\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi}\right) \right] .$$

Telle est l'équation du canal riemannien générique, en coordonnées (ξ, η, ζ).

Pour définir cette surface on peut aussi employer les équations paramétriques

$$(24)\quad \xi=\sqrt{1+\zeta^2}\,.\,\mathrm{tg}\,f(\omega)\cos\omega,\quad \eta=\sqrt{1+\zeta^2}\,.\,\mathrm{tg}\,f(\omega)\sin\omega,\quad \zeta=\zeta.$$

Pour $f(\omega)=\delta$ l'équation (23) revient naturellement à l'équation (18) du canal circulaire.

Considérations analogues dans l'espace lobatschewskien.

La normale à un point quelconque A de la section droite d'un canal générique, contenue dans le plan de telle section, est aussi normale à l'hypercycle passant par le point A; elle est donc normale à la surface du canal. Une telle propriété, vérifiée dans les deux sortes de canaux, démontre que *les sections droites d'un canal quelconque sont des géodésiques de cette surface.*

§ 23

Hélicoïde générique. — Soient O (x, y, z) un système d'axes fixes, Ω (ξ, η, ζ) un système d'axes mobiles coïncident à l'instant initial avec l'autre, et L une ligne quelconque liée au système Ω et conséquemment mobile avec lui.

Cela posé, conservons fixe le système O dans sa position, et déplaçons l'autre de façon, que l'origine O décrive l'axe Oz, tandis que tout le système Ω tourne autour de cet axe, sous la condition que le rapport des vitesses des deux mouvements soit constant.

La ligne L engendre ainsi une certaine surface que l'on appelle *hélicoïde;* la droite Oz est l'*axe,* et le rapport constant des vitesses le *paramètre.*

Le *canal circulaire* et la *surface de révolution* sont évidemment des cas-limites de l'hélicoïde.

Dans le mouvement hélicoïdal de la génératrice L un point quelconque A de la ligne se déplace sur un canal circulaire d'axe Oz et dont le rayon est la distance du point considéré à l'axe, en décrivant sur cette surface une trajectoire que nous allons déterminer. A cet but considérons la génératrice en deux positions infiniment rapprochées L, L', et soient A et B les positions correspondantes du point considéré, AA_0 et BB_0 les hypercycles-méridiens passant par ces points, AM et BN les perpendiculaires abaissées sur l'axe Oz, et AC l'arc de la section droite du canal compris entre le point A et l'hypercycle BB_0.

Dans le mouvement hélicoïdal infiniment petit à l'aide du quel la génératrice passe de la position L à l'autre L', la rota-

tion du système d'axes Ω (ξ, η, ζ) autour de l'axe Oz est représentée par l'angle $\widehat{AMC}$, et la translation de l'origine Ω sur

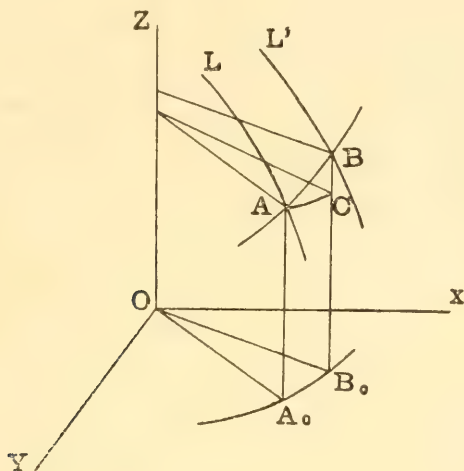



Fig. 7

Oz par le segment MN; de sorte que le paramètre p de l'héli-coïde a pour expression

$$p = \frac{MN}{\widehat{AMC}}.$$

Or si Δ est le rayon AM du canal circulaire contenant la trajectoire du point A, le quadrilatère trirectangle MNBC (dans l'hypothèse de l'espace riemannien) donne

$$BC = MN \cdot \cos \Delta. \tag{25}$$

D'ailleurs, comme l'arc circulaire AC a pour expression

$$AC = \widehat{AMC} \cdot \sin \Delta,$$

en ayant recours au triangle rectangle infiniment petit ACB, on trouve la relation

$$\operatorname{tg} i = \frac{AC}{BC} = \frac{\operatorname{tg} \Delta}{p}, \tag{26}$$

i étant l'angle ABC. On en conclut que *chaque point de la gé-*

nératrice, dans le double mouvement de génération de l'hélicoïde, décrit une hélice d'un canal circulaire ayant pour axe l'axe de l'hélicoïde.

Cette hélice, ainsi que l'on le verra dans la suite, est aussi une géodésique sur le canal; elle présente donc une analogie intime avec l'hélice ordinaire, et pour ces propriétés nous l'appelons simplement *hélice circulaire.*

Une ligne décrite d'une façon quelconque sur un hélicoïde, pourvu qu'elle ne soit pas une de ses hélices circulaires, peut être évidemment considérée comme une génératrice de la surface.

Entre ces génératrices il y en a deux d'une particulière importance; ce sont le *profil méridien* et la *section droite,* que l'on obtient en coupant l'hélicoïde par un plan respectivement passant par l'axe ou perpendiculaire à l'axe.

Le point A passe de la position actuelle à la successive B au moyen de la rotation $\widehat{AMC}$ et de la translation definie par le segment rectiligne CB, que l'on peut évidemment remplacer par l'arc élémentaire CB de l'hypercycle BB_0. — En désignant donc par P le rapport de la translation à la rotation on a, en vertu de l'équation (25):

$$P = \frac{BC}{\widehat{AMC}} = \frac{MN \cdot \cos \Delta}{\widehat{AMC}},$$

c'est-à-dire (en rappelant la signification du paramètre p de l'hélicoïde)

(27) $$P = p \cdot \cos \Delta$$ (dans l'espace r.)

(27') $$P = p \cdot \operatorname{ch} \Delta$$ (dans l'espace l.)

On voit d'ici que, bien que le mouvement hélicoïdal non-euclidien présente beaucoup d'analogies avec le mouvement hélicoidal de l'espace ordinaire, entre les deux cas il y a néanmoins des différences substantielles.

En effet dans l'espace euclidien tous les points de la figure mobile font, dans un temps déterminé, même rotation et même translation; de sorte que leur rapport est le même pour tous les points de la génératrice. Dans les espaces non-euclidiens au contraire les points de la figure mobile font, dans un temps déterminé, même rotation mais des translations différentes, dépendamment de leur distance à l'axe de l'hélicoïde; de sorte

que le rapport $\frac{\text{translation}}{\text{rotation}}$ n'est pas constant pour tous les points de la figure mobile. — Il garde même valeur seulement pour le groupe de points où la génératrice est coupée par un quelconque des canaux circulaires ayant l'axe en commun avec l'hélicoïde.

Pour éviter donc toute équivoque, il est bon de se conformer à cette définition précise: *Le paramètre d'un hélicoïde non-euclidien est le rapport entre la translation d'un point de l'axe, lié indissolublement à la génératrice mobile, et la rotation d'un point quelconque de cette génératrice, effectuées dans même temps.*

§ 24

Soient (ξ, η, ζ) les coordonnées d'un point quelconque A de la génératrice L, considérée à l'instant initial, et (X, Y, Z) (1) les coordonnées de ce point quand il est allé se placer dans la position B, après une rotation arbitraire v du système d'axes mobiles Ω (ξ, η, ζ) autour de l'axe Oz et la translation correspondante pv de l'origine Ω sur cet axe (Voir la figure 8).

Si des points A, B on abaisse les perpendiculaires AM, BN sur l'axe de l'hélicoïde, on a

$$\text{MA} = \text{NB};$$

et cette condition, pour ce que l'on vient de voir au § 17, revient à l'autre

$$X^2 + Y^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Quant à la coordonnée Z, on obtient de la figure

$$\text{ON} = \text{OM} + \text{MN} = \text{OM} + pv,$$

et

$$Z = \operatorname{tg} \text{ON} = \frac{\operatorname{tg} \text{OM} + \operatorname{tg}(pv)}{1 - \operatorname{tg} \text{OM} \cdot \operatorname{tg}(pv)} = \frac{\zeta + \operatorname{tg}(pv)}{1 - \zeta \cdot \operatorname{tg}(pv)}.$$

Si donc on pose (§ 17)

$$(28) \qquad \xi = \operatorname{tg} \rho \cdot \cos \omega, \quad \eta = \operatorname{tg} \rho \cdot \sin \omega, \quad \zeta = \operatorname{tg} \Omega,$$

(1) Les X, Y, Z sont les tangentes (circulaires ou hyperboliques) des coordonnées cartésiennes du point B.

on trouve que *les coordonnées d'un point quelconque de l'hélicoïde de paramètre* p, *engendré par la ligne* (28) *mobile autour de l'axe des* z, *sont exprimées par les équations*

$$(29)\qquad \begin{cases} X = \xi \cos v - \eta \sin v = \operatorname{tg} \rho \,.\, \cos(\omega + v)\,, \\ Y = \xi \sin v + \eta \cos v = \operatorname{tg} \rho \,.\, \sin(\omega + v)\,, \\ Z = \dfrac{\zeta + \operatorname{tg}(pv)}{1 - \zeta \,.\, \operatorname{tg}(pv)} = \operatorname{tg}(\Omega + pv)\,. \end{cases}$$

Si pour génératrice de la surface on prend le profil méridien décrit sur le plan xz, on a $\eta = 0$, et les équations (29) sont remplacées par les autres:

$$(30)\qquad X = \xi \,.\, \cos v\,, \quad Y = \xi \,.\, \sin v\,, \quad Z = \frac{\zeta + \operatorname{tg}(pv)}{1 - \zeta \,.\, \operatorname{tg}(pv)}\,.$$

§ 25

La deuxième relation (29) pour $Y = 0$, et la troisième relation (29) pour $Z = 0$ donnent respectivement $\omega + v = 0$ et $\Omega + pv = 0$.

Or comme dans ces cas les équations (29) reviennent respectivement aux autres

$$(31)\qquad \xi_0 = \operatorname{tg} \rho\,, \quad \eta_0 = 0\,, \quad \zeta_0 = \operatorname{tg}(\Omega - p\omega)$$

$$(32)\qquad \xi_0 = \operatorname{tg} \rho \,.\, \cos\left(\omega - \frac{\Omega}{p}\right), \quad \eta_0 = \operatorname{tg} \rho \,.\, \sin\left(\omega - \frac{\Omega}{p}\right), \quad \zeta_0 = 0,$$

on peut dire que *dans l'hélicoïde riemannien engendré par la ligne* (28), *le profil méridien situé sur le plan* y = 0 *et la section droite faite par le plan* z = 0, *sont définis respectivement par les équations* (31), (32).

Si (x_0, z_0) sont les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque du profil méridien, et (R_0, θ) les coordonnées polaires d'un point quelconque de la section droite, on a évidemment [relations (31), (32)]:

$$\operatorname{tg} x_0 = \xi_0 = \operatorname{tg} \rho\,, \quad \operatorname{tg} z_0 = \zeta_0 = \operatorname{tg}(\Omega - p\omega)$$

$$\operatorname{tg} R_0 = \sqrt{\xi_0{}^2 + \eta_0{}^2} = \operatorname{tg} \rho\,, \quad \theta = \omega - \frac{\Omega}{p}\,,$$

d'où il suit

$$x_0 = \rho\,, \quad z_0 = \Omega - p\omega \tag{33}$$

$$R_0 = \rho\,, \quad \theta = -\frac{\Omega - p\omega}{p}\,. \tag{34}$$

En supposant donc que

$$F(x_0, z_0) = 0 \tag{35}$$

soit l'équation du profil méridien en coordonnées cartésiennes, on déduit des relations (33), (34):

$$F(R_0, -p\theta) = 0\,. \tag{36}$$

Telle est l'équation de la section droite en coordonnées polaires.

Ces calculs et ceux que l'on pourrait faire d'une façon analogue dans l'espace lobatschewskien, demontrent que *dans un hélicoïde quelconque l'équation cartésienne du profil méridien et l'équation polaire de la section droite ont même forme.*

Applications. — 1° Le profil méridien d'un hélicoïde réglé à directrice rectiligne orthogonale aux génératrices, est une droite perpendiculaire à l'axe des z. Elle a donc pour équation

$$z_0 = h \text{ (constante)};$$

et la section droite, étant définie par l'éqnation

$$\theta = \frac{h}{p}\,,$$

est elle-même une droite. Cela était à prévoir.

2° S'il s'agit de l'hélicoïde réglé à directrice rectiligne oblique, on a pour équation cartésienne du profil méridien

$$\operatorname{tg} x_0 = k \,.\, \operatorname{tg} z_0\,,$$

et pour équation polaire de la section droite

$$\operatorname{tg} R_0 = k \,.\, \operatorname{tg}(p\theta)\,,$$

k étant une constante.

Cette analyse démontre que, tandis que dans l'espace euclidien la section droite de l'hélicoïde réglé à directrice rectiligne est *toujours* une spirale d'*Archimède* ayant le pôle sur l'axe, dans les espaces non-euclidiens au contraire la forme de la section dépend exentiellement de la valeur de la constante k. Elle se réduit à une spirale d'*Archimède* non-euclidienne *seulement* pour $k = 1$ (Première Partie, § 35).

§ 26

Lignes décrites sur même hélicoïde. — La ligne L_1 définie par les équations

$$(37) \qquad \xi_1 = \operatorname{tg} \rho_1 . \cos \omega_1 , \quad \eta_1 = \operatorname{tg} \rho_1 . \sin \omega_1 , \quad \zeta_1 = \operatorname{tg} \Omega_1 ,$$

dans le mouvement hélicoïdal de paramètre p autour de l'axe des x, engendre un hélicoïde dont le profil méridien est la ligne

$$\xi_{10} = \operatorname{tg} \rho_1 , \quad \eta_{10} = 0 , \quad \zeta_{10} = \operatorname{tg} (\Omega_1 - p\omega_1) .$$

Celle-ci coïncide avec la ligne (31) seulement si les conditions

$$(38) \qquad \operatorname{tg} \rho_1 = \operatorname{tg} \rho , \quad \operatorname{tg} (\Omega_1 - p\omega_1) = \operatorname{tg} (\Omega - p\omega)$$

sont remplies.

La première de ces équations, en revenant à l'autre

$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} ,$$

est vérifiée aussitôt que l'on prenne

$$(39) \quad \xi_1 = \xi . \cos f(\omega) - \eta . \sin f(\omega) , \quad \eta_1 = \xi . \sin f(\omega) + \eta . \cos f(\omega) ,$$

$f(\omega)$ étant une fonction arbitraire de ω.

En rappelant les relations (28), on peut avant tout écrire les (39) sous la forme

$$(40) \quad \xi_1 = \operatorname{tg} \rho . \cos [\omega + f(\omega)] , \quad \eta_1 = \operatorname{tg} \rho . \sin [\omega + f(\omega)] .$$

Après cela il suffit de comparer les équations (40), (37) entre elles, pour avoir la relation

$$\omega_1 = \omega + f(\omega) ,$$

ce qui réduit la deuxième condition (38) à l'autre

$$\Omega_1 - p(\omega + f) = \Omega - p\omega,$$

ou plus simplement

$$\Omega_1 = \Omega + p \,.\, f(\omega).$$

Si l'on remplace enfin la fonction arbitraire $f(\omega)$ par l'autre aussi arbitraire $\varphi(\omega) - \omega$, les équations (40) et la troisième équation (37) reviennent aux autres

$$(41) \quad \xi_1 = \operatorname{tg}\rho . \cos\varphi(\omega), \quad \eta_1 = \operatorname{tg}\rho . \sin\varphi(\omega), \quad \zeta_1 = \operatorname{tg}[\Omega + p(\varphi - \omega)].$$

On a donc le théorème: *Quelle que soit la forme de la fonction* $\varphi(\omega)$, *les équations* (41) *définissent une ligne tracée sur l'hélicoïde riemannien de paramètre* p *et d'axe* Oz, *engendré par la ligne* (28).

Dans l'espace lobatschewskien ont lieu des formules analogues.

Remarque. — Dans l'hypothèse $p = 0$ les équations (41) reviennent aux (12), ce qui était à prévoir.

§ 27

Hélicoïde réglé générique. — En supposant que la génératrice rectiligne g, dans la position initiale, coupe à angle droit l'axe Ox au point O_1 situé à la distance δ de l'origine, en faisant l'angle ε avec le plan xz, les coordonnées (ξ, η, ζ) de son point générique sont exprimées par les équations (20).

En remarquant alors que dans le cas actuel

$$\operatorname{tg}\rho = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\omega}, \quad \operatorname{tg}\Omega = \cot\varepsilon \operatorname{tg}\delta \,.\, \operatorname{tg}\omega,$$

les équations (31) donnent pour coordonnées d'un point quelconque du profil méridien

$$(42) \quad \begin{cases} \xi_0 = \dfrac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\omega}, \\[2ex] \zeta_0 = \operatorname{tg}(\Omega - p\omega) = \dfrac{\operatorname{tg}\Omega - \operatorname{tg}(p\omega)}{1 + \operatorname{tg}\Omega . \operatorname{tg}(p\omega)} = \dfrac{\cot\varepsilon \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}(p\omega)}{1 + \cot\varepsilon \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\omega . \operatorname{tg}(p\omega)}. \end{cases}$$

Éliminons ω entre les équation (42), et ensuite appliquons à l'équation que l'on va obtenir le théorème du § 25. On obtient ainsi ce résultat: *Dans l'hélicoïde réglé riemannien général le profil méridien situé sur le plan* y = 0 *et la section droite faite par le plan*

coordonné $z = 0$, *sont définis respectivement par les équations*

$$(43) \quad \zeta_0 = \frac{\cot \varepsilon \sqrt{\xi_0^2 - \mathrm{tg}^2 \delta} - \mathrm{tg}\left[p \, . \, \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\xi_0^2 - \mathrm{tg}^2 \delta}}{\mathrm{tg}\,\delta}\right)\right]}{1 + \cot \varepsilon \sqrt{\xi_0^2 - \mathrm{tg}^2 \delta} \, . \, \mathrm{tg}\left[p \, . \, \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\xi_0^2 - \mathrm{tg}^2 \delta}}{\mathrm{tg}\,\delta}\right)\right]}$$

$$(44) \quad \mathrm{tg}(p\theta) = \frac{\cot \varepsilon \sqrt{\mathrm{tg}^2 R_0 - \mathrm{tg}^2 \delta} - \mathrm{tg}\left[p \, . \, \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{tg}^2 R_0 - \mathrm{tg}^2 \delta}}{\mathrm{tg}\,\delta}\right)\right]}{1 + \cot \varepsilon \sqrt{\mathrm{tg}^2 R_0 - \mathrm{tg}^2 \delta} \, . \, \mathrm{tg}\left[p \, . \, \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{tg}^2 R_0 - \mathrm{tg}^2 \delta}}{\mathrm{tg}\,\delta}\right)\right]}$$

Résultats analogues dans l'espace lobatschewskien.

§ 28

Si aux points successifs d'une hélice L d'un canal circulaire de rayon r et d'axe Oz, on construit les droites g tangentes au canal et inclinées d'un angle constant ε sur les hypercycles générateurs, le lieu de ces droites est un hélicoïde ayant pour axe l'axe des z.

Considérons maintenant l'arc infiniment petit AB de L, ab-

Fig. 8

baissons les perpendiculaires AM, BN sur l'axe et construisons enfin au point M la section droite MAC du canal.

En vertu de la relation entre un arc d'hypercycle et sa projection sur l'axe (Première Partie, § 24), on a

$$MN = \frac{BC}{\cos r}.$$

D'ailleurs le triangle infiniment petit ABC, considéré comme euclidien, donne

$$BC = AC \, . \cot \varepsilon = \sin r \, . \cot \varepsilon \, d\omega ,$$

ω étant l'angle polaire sur le plan coordonné $z = 0$. On a donc la relation

$$MN = \operatorname{tg} r \, . \cot \varepsilon \, d\omega ,$$

exprimant la translation élémentaire dans le mouvement hélicoïdal, à laquelle correspond évidemment la rotation infiniment petite $d\omega$.

On a donc le théorème : *Le lieu des tangentes à un canal circulaire de rayon* r, *menées aux points successifs d'une de ses hélices, et inclinées de l'angle constant* ε *sur les hypercycles profils méridiens du canal, est un hélicoïde de paramètre*

$$p = \operatorname{tg} r \, . \cot \varepsilon , \tag{45}$$

ayant l'axe en commun avec le canal.

Hélicoïde développable. — En posant la condition que l'hélicoïde que l'on vient d'engendrer soit développable, le théorème ci-dessus conduit à l'autre : *Pour qu'une droite mobile engendre un hélicoïde développable, il est nécessaire et suffisant que le paramètre du mouvement soit exprimé par la relation* (45), r *étant la plus courte distance entre la droite et l'axe, et* ε *l'inclinaison constante de la droite sur les hypercycles générateurs du canal circulaire contenant l'hélice décrite par le point de la droite mobile le plus rapproché à l'axe.*

Dans l'espace lobatschewskien on a des résultats analogues.

§ 29

Hélicoïde réglé à directrice rectiligne orthogonale. — Si à un certain instant la génératrice rectiligne g coupe à angle droit la directrice (axe des z) au point M, un point quelconque A de g décrit une hélice d'un canal circulaire de rayon $MA = \rho$.

Dans la position de la droite g correspondant à l'inclinaison ω

sur le plan xy, les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de A sont données par les formules

$$(46) \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \rho \,.\, \cos \omega\,, \quad \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \rho \,.\, \sin \omega\,, \quad z = p\omega\,,$$

p étant le paramètre de l'hélicoïde.

Si donc on élimine ρ et ω entre ces équations, on trouve que *l'hélicoïde réglé à directrice rectiligne orthogonale et de paramètre* p, *est représentée (en coordonnées cartésiennes* x, y, z) *par l'équation*

$$(47) \qquad z = p \,.\, \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} \right).$$

Celle-ci, en introduisant les coordonnées $\xi = \operatorname{tg} x$, $\eta = \operatorname{tg} y$, $\zeta = \operatorname{tg} z$, se réduit à l'autre

$$(48) \qquad \zeta = \operatorname{tg} \left[p \,.\, \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\eta}{\xi} \right) \right],$$

de sorte que si l'on fait la représentation de l'hélicoïde sur l'espace ordinaire à l'aide des formules du § 11, on obtient la surface euclidienne S_1

$$(49) \qquad z_1 = \operatorname{tg} \left[p \,.\, \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{y_1}{x_1} \right) \right].$$

On reconnait de cette équation que l'image S_1 que l'on vient d'obtenir n'est nullement un hélicoïde, mais une simple surface réglée à directrice rectiligne orthogonale (ce que l'on pouvait bien prévoir).

Allons étudier une construction géométrique de cette surface S_1.

Si S_2 est l'hélicoïde réglé *minimum* de l'espace ordinaire représenté par l'équation

$$(50) \qquad z_2 = p \,.\, \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{y_1}{x_1} \right),$$

la comparaison des relations (50), (49) donne

$$z_1 = \operatorname{tg} z_2 \,.$$

Si donc $MA \equiv g_1$, $NB \equiv g_2$ sont deux génératrices de la surface S_1 et de l'hélicoïde S_2 ayant même projection sur le plan $z = 0$, on trouve que les deux hauteurs OM, ON sont liées entre

elles par la relation

$$ON = \operatorname{tg} OM . \tag{51}$$

D'ici la construction suivante : S_2 *étant un hélicoïde réglé minimum de paramètre* p, *dans l'espace ordinaire, déplaçons les génératrices rectilignes parallèlement à leur direction, et d'une quantité variable suivant la loi exprimée par l'équation* (51), *en faisant en sorte qu'elles s'appuient toujours à l'axe. La surface* S_1 *engendrée par cette construction, est l'image euclidienne de l'hélicoïde non-euclidien* (46).

Remarque. — Pour que la surface réglée S_1 fût elle-même un hélicoïde, le déplacement $MN = ON - OM = \operatorname{tg} OM - OM$ que l'on fait subir aux génératrices rectilignes de l'helicoïde S_2 le long de l'axe devrait être constant, ce que ne peut pas arriver (conformément à un résultat de ce paragraphe).

§ 30

Les résultats que l'on vient d'exposer peuvent être généralisés comme il suit.

Soient : S_1 l'image dans l'espace ordinaire d'un hélicoïde non-euclidien quelconque S de paramètre p, et (X, Y, Z), (x_i, y_i, z_i), (x_e, y_e, z_e) les coordonnées de trois points correspondants de l'hélicoïde S, de son image S_i et de l'hélicoïde euclidien S_e de paramètre p, ayant pour profil méridien l'image du profil méridien de S.

Entre les coordonnées (X, Y, Z) d'un point de l'hélicoïde S et les coordonnées (ξ, ζ) du point correspondant de son profil méridien ont lieu les relations (30) du § 24. Mais, en vertu de la double interprétation géométrique des équations dans l'espace non-euclidien et dans l'espace ordinaire (§ 11), les relations (30) définissent aussi les coordonnées (x_i, y_i, z_i) de l'image du point (X, Y, Z). On a donc

$$x_i = \xi \cos v , \quad y_i = \xi \sin v , \quad z_i = \frac{\zeta + \operatorname{tg}(pv)}{1 - \zeta . \operatorname{tg}(pv)} . \tag{52}$$

Quant aux coordonnées (x_e, y_e, z_e), on a évidemment

$$x_e = \xi \cos v , \quad y_e = \xi \sin v , \quad z_e = \zeta + pv ; \tag{53}$$

de sorte que pour déterminer la dépendance géométrique entre la surface S_i et l'hélicoïde S_e, il suffit de déterminer la relation

entre z_i et z_e; cela revient évidemment à éliminer ζ entre les troisièmes équations (52), (53).

On obtient ainsi l'équation

$$z_i = \frac{z_e - pv + \operatorname{tg}(pv)}{1 - (z_e - pv) \cdot \operatorname{tg}(pv)}, \tag{54}$$

définissant cette construction : S *étant un hélicoïde riemannien quelconque, on construit l'hélicoïde euclidien* S_e *ayant même paramètre, et dont le profil méridien est l'image du profil de* S. *Ensuite on considère les profils méridiens de* S_e *dans leurs positions successives, et sur chaque plan méridien on altère les hauteurs* z_e *suivant la loi exprimée par la relation* (54). *Le lieu des lignes que l'on vient de construire est l'image* S_i *de l'hélicoïde non-euclidien* S *sur l'espace ordinaire.*

Comme la construction géométrique définie par la relation (54) n'est pas la même sur tous les plans méridiens de l'hélicoïde S_e, on conclut que l'*image* S_i *de l'hélicoïde* S *sur l'espace euclidien n'est jamais un hélicoïde*

Dans l'hypothèse $p = 0$ la relation (54) revient à l'autre

$$z_i = z_e,$$

et l'on tombe ainsi sur la propriété connue (§§ 13-17): *L'image d'une surface de révolution non-euclidienne sur l'espace ordinaire est elle-même une surface ds révolution.*

§ 31

Pseudo hélicoïde. — Dans les espaces non-euclidiens on appelle *pseudo-hélicoïde* toute surface dont l'image dans l'espace ordinaire est un hélicoïde.

Or si l'on parte de l'hélicoïde euclidien S_e défini par les équations (53), la construction du pseudo-hélicoïde correspondant S^* revient simplement à la construction de l'image de S_e sur l'espace non-euclidien.

En ayant recours aux formules du § 11, on trouve pour coordonnées d'un point quelconque de la surface S^*:

$$\xi^* = x_e = \xi_0 \cdot \cos v, \quad \eta^* = y_e = \xi_0 \sin v, \quad \zeta^* = z_e = \zeta_0 + pv. \tag{55}$$

Mais le pseudo-hélicoïde peut se déduire directement de l'hélicoïde non-euclidien, en évitant (pour ainsi dire) le passage à travers de l'espace euclidien.

En effet pour définir un hélicoïde non-euclidien S on peut faire usage des équations (§ 24)

$$(56)\qquad \xi = \xi_0 \cos v\,, \quad \zeta = \xi_0 \sin v\,, \quad \eta = \frac{\zeta_0 + \operatorname{tg}(pv)}{1 - \zeta_0 \cdot \operatorname{tg}(pv)}\,.$$

Or comme les deux systèmes d'équations (55), (56) diffèrent seulement dans la troisième équation, la recherche du lien entre ζ et ζ^* se réduit à l'élimination de ζ_0 entre les troisièmes équations (55), (56). On obtient ainsi la relation

$$(57)\qquad \zeta^* = \frac{\zeta - \operatorname{tg}(pv)}{1 + \zeta \cdot \operatorname{tg}(pv)} + pv\,,$$

d'où le théorème : *Pour construire un pseudo-hélicoide riemannien, on parte d'un hélicoide arbitraire, et sur chacun de ses plans méridiens on altère les hauteurs* ζ, *relatives aux points du profil correspondant, suivant la loi exprimée par la relation* (57). *Le lieu des lignes que l'on vient de construire, est un pseudo-hélicoïde.*

Considérations et résultats analogues dans l'espace lobatschewskien.

(À suivre.)

SUR LA CONTINUITÉ DES SÉRIES

NOTE DE

M. L. Orlando
à Rome

Supposons que les fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, ..., en nombre infini, soient des fonctions continues, de la variable x, dans tous les points d'un intervalle fini (a, b). M. C. Arzela a donné la condition nécessaire et suffisante pour que la série $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots\ldots$, supposée convergente, représente une fonction $s(x)$, de la variable x, continue dans tous les points de l'intervalle (a, b).

Posons

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$$

$$R_n = s - s_n$$

et rappelons la condition de Arzela: c'est la suivante:

A) Si l'on donne à l'avance, d'une façon arbitraire, les deux nombres positifs ε (si petit que l'on veut) et N (si grand que l'on veut), on pourra partager l'intervalle (a, b) dans un nombre fini de parties, telles qu'à l'intérieur de chaque partie on puisse uniformement poser $|R_n(x)| < \varepsilon$, avec un n au moins que soit plus grand que N. Dans chaque point de repartition, il est nécessaire que le nombre n soit valable pour les deux intervalles qui aboutissent à ce point.

M. Arzela a demontré le premier que la condition *A*) est nécessaire et suffisante pour la continuité de la série $s(x)$, quand on suppose aussi, bien entendu, la convergence de $s(x)$ en chaque point x de l'intervalle (a, b).

M. Vivanti, mon éminent maître, a demontré d'une façon bien simple et bien élégante cette proposition. En étudiant avec soin la demonstration de M. Vivanti, je me suis demandé

lequel est le rôle du nombre N; et j'ai trouvé que ce nombre N est tout simplement décoratif.

J'ai communiqué cette observation à M. Arzela, qui l'a trouvée juste, tout en observant à son tour que la présence de N peut servir à éclaircir la chose, ce que je ne nie pas.

En resumant, je reduis la condition *A*) à la suivante:

B) Si l'on donne à l'avance, d'une façon arbitraire, le nombre positif ε, si petit que l'on veut, on pourra correspondamment partager l'intervalle (a, b) dans un nombre fini de parties, telles qu'à l'intérieur de chaque partie on puisse uniformement poser $|R_n(x)| < \varepsilon$, avec un n au moins. Dans chaque point de repartition, il faut que n soit valable de l'un et de l'autre coté.

Je vais suivre de très-près la demonstration de M. Vivanti.

La condition est d'abord *nécessaire*. Supposons qu'elle n'aie pas lieu, et alors nous devrons admettre que, dans toutes les possibles repartitions de (a, b) en un nombre fini de parties, il existent des points x tels que $|R_n(x)| \geq \varepsilon$, avec n arbitrairement fixé et ε opportunement choisi. Partageons (a, b) en deux parties égales: l'une au moins de ces deux parties aura quelques x pareils; partageons cette partie en deux parties égales; et continuons comme ça, faisant toujours la même observation. Ayant nié la condition *B*), nous pourrons continuer à l'infini. Les extrêmes supérieurs de ces intervalles (de plus en plus raccourcis) aient ξ pour limite inférieure: ce sera aussi la limite supérieure des extrêmes inférieurs. Dans le voisinage de ξ, si près que l'on voudra, existeront toujours des points x tels que $|R_n(x)| \geq \varepsilon$, et cela de quelle manière que l'on fixe n. Fixons alors n tellement que l'on aie $|R_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$; et soit x si près de ξ que l'on aie $|s_n(x) - s_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$. La première de ces deux inégalités peut s'écrire car la série converge en ξ, la seconde peut s'écrire car $s_n(x)$ est la somme d'un nombre fixe de fonctions continues de x. Si la série $s(x)$ représente aussi une fonction continue, alors on pourra rapprocher x a ξ de façon à écrire $|s(x) - s(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Mais alors on en tire $|R_n(x)| < \varepsilon$ pourvu que x soit assez près de ξ, ce qui est contre l'hypothèse (absurde) que nous avions admise.

Demontrons maintenant que la condition est *suffisante*. Soit (par absurde) $s(x)$ discontinue en un point ξ de (a, b), et la condition *B*) verifiée. Le nombre ε étant choisi, soit τ un petit interval, comprenant (même comme extrême, si cela arrive) le point ξ, et tel que l'on puisse en τ écrire uniformement

$|R_n(x)| < \varepsilon$, avec un n au moins. La fonction $s(x)$ étant supposée discontinue au point ξ, on pourra toujours choisir un ε de tel sort que l'inégalité $|s(x) - s(\xi)| > 3\varepsilon$ soit valide, si près que l'on prenne le point x au point ξ. Mais, la condition *B*) étant admise, on peut bien écrire $|R_n(\xi)| < \varepsilon$, car ξ est un point du petit interval τ; donc on doit trouver $|s_n(x) - s_n(\xi)| > \varepsilon$, si près que l'on prenne le point x au point ξ. Cela est absurde, car s_n est la somme d'un nombre fini fixe de fonctions continues.

Observons que, la condition *B*) étant demontrée nécessaire et suffisante pour la continuité de s, on en déduit la même chose à l'égard de la condition *A*). En effet si la série est continue, il est de même continue la série que l'on en tire en supprimant les N premiers termes.

BIBLIOGRAPHIA

GIUSEPPE VERONESE: *Nozioni di Geometria Intuitiva.* Padova, 1909.
—— *Elémenti di Geometria* (1.ª e 2.ª partes). Verona, 1909.

O sabio professor da Universidade de Padua occupa um logar distincto entre os mathematicos que têem tratado dos fundamentos da geometria elementar, sobre os quaes tem publicado bellos e importantes trabalhos. Porisso os livros que vimos de mencionar não só são uteis aos alumnos, que principiam os seus estudos geometricos, os quaes têem nelles excellentes textos para estes estudos, mas tambem aos professores, que se interessam pelas questões fundamentaes da Geometria, os quaes poderão vêr nelles como o Sr. VERONESE harmonisa, no ensino elementar, os principios philosophicos da referida sciencia com as exigencias didacticas.

Podem-se dividir em dois grupos os seus livros de Geometria elementar.

O primeiro, que comprehende as *Noções de Geometria Intuitiva,* é destinado aos gymnasios inferiores e escolas complementares.

Nestes livros o auctor não apresenta as diversas proposições da Geometria sob uma fórma logicamente determinada; enuncias-as por meio de figuras a que correspondem objectos susceptiveis de serem observados directamente.

As proposições indicadas são justificadas por construcções ou verificações experimentaes por meio da regua, esquadro, compasso, etc.

A noção de rectas parallelas é fundada na noção de rectas oppostas em relação a um ponto, no que se afasta da noção euclidiana.

O segundo grupo, que comprehende os *Elementi di Geometria,* é destinado aos Gymnasios, Lyceus e Institutos technicos.

O methodo de exposição é o methodo racional — a intuição

e o raciocinio; o auctor occupa-se de duas questões importantes que tèem preoccupado a attenção dos mais notaveis geometras: o numero dos postulados da geometria e o conceito da egualdade de figuras em geral.

No prefacio da 4.ª edição mostra que o numero dos postulados póde ser reduzido a quatro ou cinco.

Todavia na exposição da sua geometria apresenta muitos postulados de simples verificação.

A theoria da medida das grandezas é exposta com precisão e brevidade.

A exposição é feita sempre com muita clareza e rigor.

Alves Bonifacio

Professor da Faculdade de Sciencias
da Universidade do Porto.

Luise Petrén: *Extension de la methode de Laplace.* Lund, 1911.

É muito conhecido o methodo dado por Laplace para a integração das equações ás derivadas parciaes da fórma

$$s + p + bq = 0 ,$$

o qual foi consideravelmente aperfeiçoado e simplificado por M. Darboux.

Na sua bella Memoria Luise Petrén generalisa as indagações de que tem sido objecto a equação mencionada, ao caso das equações da fórma

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i (x, y) \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \, \partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} A'_i \frac{\partial^i z}{\partial y} = 0 .$$

ENSINO UNIVERSITARIO E CULTURA INTEGRAL

DISCURSO PRONUNCIADO
NA SESSÃO DE ABERTURA SOLEMNE DA UNIVERSIDADE DO PORTO,
NO ANNO LECTIVO DE 1911-1912

POR

CANDIDO DE PINHO

SENHOR MINISTRO DO FOMENTO!
SENHOR REITOR DA UNIVERSIDADE DO PORTO!
MEUS SENHORES!

Na sua ultima reunião, celebrada ha poucos dias, o Senado da Universidade do Porto encarregou-me de exprimir nesta solemnidade a sua congratulação e o jubilo, de que estava possuido, ao ver que esta instituição deixava de ser uma mera formula burocratica para assumir o papel pedagogico que a lei lhe designara.

Muito embora ella não iniciasse a sua existencia com todos os elementos de que a lei a dotára, havia razões que justificavam um sincero regosijo.

Com effeito, a inauguração de uma Universidade na cidade, que até agora se tem estremado pelo seu amor ao trabalho e pela independencia das suas manifestações politico-sociaes, marca um momento notavel na nossa vida e constitue uma affirmação inequivoca dos principios que presidiram á elaboração do programma de renovação nacional.

Hoje, como sempre, os unicos processos capazes de realizar no seio de uma nação a unidade indispensavel á harmonia da vida collectiva são os que resultam da cultura superior do espirito, sem a qual o trabalho civilizador, todo o esforço de

progresso e melhoramento, não poderão emancipar-se da crueza e das escorias da vida quotidiana.

Desde a edade media, quando principiaram a esboçar-se as nações modernas, os centros universitarios teem sido os grandes laboratorios em que se apuram os valores que dominam e orientam a vida humana; — a verdade, o direito, a arte, etc. Vae porém uma distancia incalculavel entre a cultura que realizavam as Universidades desse tempo e aquella em que se empenham os centros de ensino moderno; toda a distancia que separa duas phases do espirito inteiramente diversas.

Então o pensador e o sabio preocupavam-se exclusivamente com o conhecimento das leis racionaes e eternas do universo e reduziam o saber a systemas de conceitos immutaveis, em que toda a natureza, toda a realidade, toda a existencia haviam de entrar como em moldes, que jámais se quebrariam.

Hoje o espirito scientifico procura por todas as maneiras collocar-se em contacto com a natureza, e, sem abdicar da sua actividade original e propria, investigar as relações, que o prendem no conjuncto do universo, e o coefficiente, que elle mesmo exprime na cadeia interminavel dos phenomenos.

Afastou-se portanto da estancia, que tanto o fascinára, do absoluto e do immutavel, e tornou-se vida e acção.

E é neste proposito de tudo pesquisar, de encarar todas as faces de existencia, de reduzir todos os seres e todas as relações ás fórmulas do conhecimento concreto, as quaes se vão ampliando á medida que os horisontes da natureza se descerram: é nesta ancia de conhecer todas as utilidades e desvendar a lei de toda a harmonia que elle esgota hoje os seus recursos, remoçando a cada nova conquista, revigorando-se perante cada obstaculo, alimentado sempre por uma seiva que se vae tornando mais fecunda á medida que se defronta mais de perto com a realidade, no seio da qual esse espirito se examina a si proprio como uma funcção de valor equivalente, em vez de pairar, sobranceiro a ella, numa esphera superior e extranha.

O abandono dos methodos anthropocentricos, que constituiram o eixo de toda a especulação, marca pois o momento exacto em que o espirito scientifico assumiu a sua feição actual. A partir de então abateram-se as barreiras que separavam o mundo interno do mundo externo, e o trabalho de investigação e de revisão, então iniciado, accumulou em breve uma massa inaudita de dados e observações, que dão ao campo do saber uma vastidão esmagadora.

Exteriorizando-se, saindo do campo das abstracções, o espirito enriquecera prodigiosamente: restava saber se tinha de

mudar o signal dos valores que constituiam o seu conteudo. Conhecer as cousas através de fórmas tomadas da nossa propria constituição, erigida á categoria de padrão do universo, ou pedidas ao mundo exterior, não póde ser indifferente sob o ponto de vista da legitimidade da especulação e do criterio que tem de presidir á organização do quadro geral do saber.

Ora é perante esta necessidade que a exuberancia da vida intima, caracteristica do espirito scientifico moderno, adquire a sua plena e mais attrahente manifestação. Desde que a multiplicação dos seus pontos de contacto com a realidade e o apuramento das mutuas relações constituiam a sua principal riqueza, os systemas e methodos de investigação, que representam outros tantos pontos de vista, em que elle se colloca para alargar as perspectivas da verdade, succedem-se, ou antes atropelam-se, a ponto de dar á primeira vista uma impressão de anarchia. Naturalismo, intellectualismo, pragmatismo, activismo, representam outras tantas formulas em que se pretende abranger e systematizar o conhecimento, e que disputam vivamente o predominio da direcção intellectual.

É evidente que, na utilisação immediata do labor scientifico, no aperfeiçoamento technico que sob o seu impulso se vae dia a dia realizando em todas as direções, nas applicações já encontradas ou entrevistas da vida pratica, não ha motivo para a mais ligeira discordancia. O enthusiasmo e a admiração com que todos os dias são saudadas as maravilhas que a actividade e a penetração do homem desentranham do cabedal, que a sciencia colloca ao seu dispor, são universaes e unanimes. Mas já assim não acontece quando dentro de uma especialização do saber surge um systema de ideias que, abandonando o dominio em que porventura encontra a sua justificação, pretende estender-se a outras espheras; ou ainda, e principalmente, quando se pretende attingir uma concepção synthetica, que coordene o conjuncto de realidades.

O que é certo porém é que, ainda nestes casos, a agitação scientifica da nossa epocha não é, como a lucta do nominalismo e realismo da edade media, um torneio de subtilezas pura e exclusivamente intellectuaes, um simples jogo de conceitos; é um intenso movimento de vida, em que lateja um ideal de aperfeiçoamento moral e intellectual, indefinido ainda, mas revelando já nos seus contornos embryonarios uma amplidão incalculavel.

Era de certo esse ideal que Goethe já contemplava quando escrevia que — «o homem estava nesta vida para tornar eterno o que era ephemero».

* *

Eis aqui rapidamente esboçadas, como as concebo, as responsabilidades da cultura que as Universidades modernas teem a seu cargo ministrar. Para merecerem verdadeiramente este nome, é indispensavel que o seu ensino colloque ao lado da instrucção especializada e technica os elementos indispensaveis para iniciar o homem nessas carrentes do pensamento que orientam e fecundam o trabalho intellectual e os habilitam a integrarem-se na plena existencia da sua epocha.

Doutra fórma apenas poderão realizar, na melhor hypothese, uma exhibição mais ou menos espectaculosa de systemas ou ideias petrificadas, inadaptaveis ao organismo vivo da sciencia, e articuladas artificialmente como os ossos de um esqueleto de demonstração anatomica.

Para esclarecer e completar o meu pensamento, eu encontro numa reflexão de POINCARÉ um alcance demonstrativo tão flagrante, que não posso eximir-me a reproduzil-o. — «O desconhecido, diz elle, que inventou a palavra *calor* votou muitas gerações ao erro. Principiou-se a tratar o calor como uma substancia, simplesmente porque era designado por um substantivo, e em virtude d'isso julgaram-no indestructivel». E accrescenta: «basta ás vezes mudar de linguagem para se descortinarem relações á primeira vista insuspeitadas».

Quem assim se exprime conhece muito de perto o poder esterilizador do dogmatismo doutrinario, que, mesmo nas epochas de mais intensa actividade, tende a immobilizar o espirito, extinguindo d'esta forma a sua capacidade creadora.

Com effeito, qualquer que seja a designação sob que se nos imponha, todo o systema de ideias, que transpõe a esphera de inducções que o processo logico edifica sobre um campo determinado da observação ou da experiencia, aspira a abranger a verdade integral, como se ella fosse, sob o ponto de vista do conhecimento, um valor fixo e inalteravel, que occupasse uma posição privilegiada, um momento unico na curva da evolução psychologica. É claro que nestas condições não pode sustentar-se senão assumindo o caracter axiomatico, incompativel com a livre e fecunda actividade do espirito.

A historia das sciencias e da philosophia está pejada de ruinas que attestam a inanidade dessa pretensão.

Isto não significa que o espirito scientifico haja de prescindir ou de emancipar-se totalmente do esforço generalizador. Quer a imaginação creadora do sabio, quer a systematização logica dos conhecimentos, não poderão realisar nunca a sua obra sem que consciente ou inconscientemente se deixem conduzir por uma ideia philosophica.

O que é indispensavel é que essa philosophia não creste a folhagem viçosa que a vida do espirito desabrocha no seio da natureza, e através da qual se vivifica a seiva que a sustenta.

O que é indispensavel é que no meio da inextrincavel complexidade dos phenomenos, com que tem de relacionar-se, o espirito não perca de vista o que lhe é proprio, e, em vez de ceder á antithese do objectivo e do subjectivo, realize a synthese creadora dum mundo novo sob a fórmula de uma lei que exprima a harmonia da existencia.

O que é indispensavel, finalmente, é manter bem alto a autonomia e a independencia d'essa vida que nos seus movimentos rhythmicos de exteriorização e interiorização é conduzida sempre por uma actividade creadora, evolucionando na directriz do maximo aperfeiçoamento e progressiva ampliação.

Antes de terminar, eu não posso deixar de exprimir os votos que faz o Senado Universitario pela prosperidade da nova instituição. A meu ver, ella encontra-se duplamente garantida. Por um lado, o Governo, enviando aqui um dos seus membros, que é tambem um professor distinctissimo, quiz decerto significar quanto interesse e disvelo lhe merece a creação que mais elevadamente representa os largos intuitos reformadores do Governo provisorio e tanto lustre reflecte no seu programma e no nome do illustre ministro que referendou o decreto de reforma da instrucção publica.

Por outro lado, o corpo docente da Universidade, composto de professores cujo nome se acha aureolado de merecido prestigio, tem dado provas sobejas da maneira superior por que sabem desempenhar-se da alta funcção que lhe está comettida. Qualquer elogio que eu lhe fizesse poderia até ser tomado como desprimor, porque significaria que alguem desconhece os seus merecimentos ou lhe regateia louvores.

O Governo portanto não abandona a Universidade; os professores dar-lhe-hão o melhor da sua existencia; e nestas condições o novo instituto não deixará de ser uma honra da nação.

Disse.

A IMPORTANCIA E DIGNIDADE DA SCIENCIA E AS EXIGENCIAS DA CULTURA SCIENTIFICA

DISCURSO PRONUNCIADO
NA SESSÃO DE ABERTURA SOLEMNE DA UNIVERSIDADE DO PORTO,
NO ANNO LECTIVO DE 1911-1912

POR

A. J. Ferreira da Silva

SUMMARIO:

Preliminares: objecto da conferencia e saudação ao Reitor.

I. A sciencia não é entretimento esteril. A sciencia civilisadora, e base dos progressos materiaes das nações. A sciencia educadora. A sciencia emancipadora e escola do pensamento livre. A sciencia pacificadora e principio de concordia internacional. A sciencia bemfeitora da humanidade (Berthelot).

II. A esterilidade scientifica dos povos da peninsula iberica. Pretendidas causas dessa esterilidade: viveza de imaginação, heterogeneidade ethnica, belleza do clima e feracidade do solo; opinião do prof. dr. Carracido. Principal causa do atrazo da cultura scientifica em Portugal: orientação puramente litteraria e rhetorica da instrucção nacional desde longa data; apreciação justa de Alexandre Herculano: documentos justificativos.

III. As condições indispensaveis para a cultura das sciencias segundo o sr. prof. Louis Henry: meios de trabalho — *materiaes* e *intellectuaes*. Livros e bibliothecas. Collecções de historia natural. Laboratorios devidamente installados, com dotações sufficientes e de pessoal auxiliar: assistentes, preparadores, ajudantes, serventes. Apreciação dos prof. Cannizzaro e Gilbert. Importancia da questão dos vencimentos dos professores; o problema da sua vida deve ficar resolvido. Estimulantes da cultura scientifica: concursos a premios sobre questões postas; premios; missões de estudo. Educação do meio social no sentido de dar apreço e animar os estudos das sciencias.

IV. Saudação ao Ministro. Portugal deve cuidar a serio da sua instrucção superior: os exemplos a seguir: o resurgimento scientifico da Italia, do Japão e da Hespanha.

Epilogo. Saudação aos alumnos: elogio do trabalho: palavras de Pasteur, Ramon y Cajal e Ferreira Lapa. Incitamento á cultura scientifica em collaboração com os professores.

Senhor Ministro, ([1])
Venerando Reitor desta Universidade,
Meus honrados e illustres Collegas,
Minhas Senhoras e Senhores,

É com algum embaraço e timidez que hoje venho a esta assembleia plenaria da Universidade portucalense, para fazer a oração inaugural da abertura dos cursos de 1911-1912. O venerando Reitor quiz dar-me a subida honra de convite para esse fim. Talvez de si para si pensasse em certos factos historicos, que denunciam a alliança da mathematica á chimica: o grande Newton, o pontifice maximo das sciencias que elle actualmente illustra com o brilho do seu engenho, fez numerosas experiencias de chimica que se perderam, e alguns extractos que nos restam da sua obra nesta direcção mostram que os estudos praticos do laboratorio lhe eram tão familiares como as concepções mais levantadas da mecanica celeste; todos sabem como collaboraram o mathematico Laplace e Lavoisier, o creador da chimica moderna; e, talvez com tal proposito, quiz elle dar consagração á chimica nesta festa solemne. Era dever meu não me escusar; não me escusei, sem desconhecer que me faltam os dotes para a delicada missão, especialmente os recursos oratorios, muito apreciaveis em occasiões como esta. Com a fraqueza dos meus recursos vou cumprir perante vós o meu dever, com zelo e boa vontade, mas singela e modestamente. É da dignidade e importancia da sciencia no momento actual da civilisação e das condições hoje em dia exigidas para uma efficaz cultura scientifica que me vou occupar.

Mas, antes d'isso, careço tambem, e é meu dever, agradecer commovidamente a maneira captivante como fui apresentado a esta assembleia. O nosso illustre Reitor, que m'o permitta a sua modestia, é uma das mais legitimas glorias de Portugal; só o posso comparar ao glorioso Pedro Nunes a quem me referirei: é o nosso Pedro Nunes do seculo xix. É verdadeiramente reconfortante e consolador, quando se tem experimentado duros embates e contrariedades na vida, ter por si um Mecenas tão illustre.

([1]) Dr. Sidonio Paes, Ministro do Fomento.

I

MEUS SENHORES

Tempos houve, e não vão longe, em que o papel e a utilidade da cultura das sciencias, para manter o prestigio moral e a força das sociedades, eram completamente desconhecidos ou mal apreciados. A sciencia era tida como obra esteril, entretenimento de luxo ou de curiosidade, servindo, quando muito, para os grandes e poderosos da terra. Houve na revolução francesa espiritos estreitos que inculcaram «a inutilidade da casta dos sabios especulativos, cujo espirito vagueia constantemente por sendas perdidas na região dos sonhos e das chimeras», e não hesitaram em affirmar que «a republica não tinha obrigação de fazer sabios, nem lhes crear privilegios»; mas sim, apenas contribuir para a instrucção geral a todos os cidadãos! E até um chimico (foi FOURCROY, ha de tudo neste mundo!), renegando a sua missão e as dignidades academicas, fulminava «as gothicas universidades e as aristocraticas academias».

Este conceito estreito, erroneo, que tem em menosprezo o trabalho scientifico de investigação e os serviços por elle prestados á sociedade, desappareceu certamente na massa geral dos paizes cultos; mas ha ainda muita gente que não comprehende a importancia primacial da cultura scientifica na epoca presente: seria bom te-la, quando isso possa ser; mas poder-se-ha prescindir d'ella.

Comecemos, pois, por affirmar em contrario que as leis da natureza, descobertas pela sciencia, se applicam constantemente á pratica das industrias, as melhoram incessantemente, e, como consequencia, beneficiam de um modo surprehendente as condições da vida material dos povos modernos; numa palavra, que a sciencia é *civilisadora*.

As leis da physica e da mecanica applicadas permittiram a construcção das machinas e dos caminhos de ferro, dos telegraphos ordinarios e dos telegraphos sem fio, da illuminação electrica e da nova metallurgia baseada na electrolyse.

As leis da astronomia e da physica conseguiram traçar com exactidão antes desconhecida a carta pormenorisada dos continentes e das ilhas; geraram a navegação a vapor, augmentaram

extraordinariamente a velocidade, a segurança e o poderio do homem nos mares.

As leis da chimica melhoraram todas as industrias antigas, fizeram-n'as progressivas, isentaram-n'as da rotina das receitas empiricas e tradicionaes d'outrora; crearam materias artificiaes para a tinturaria, que modificaram por completo os processos antigos; forneceram á medicina uma grande variedade de agentes therapeuticos activos e de effeitos seguros; illuminaram a gaz de hulha, a acetyleno ou por meio de mangas de incandescencia as ruas e avenidas das cidades e villas; forneceram á engenharia esses explosivos possantes, que fazem em pouco tempo o trabalho que na antiguidade só era possivel com legiões de escravos, durante mezes e annos; guiaram a agronomia, a œnologia e todas as industrias ruraes no sentido de uma producção muito mais abundante e perfeita, preconisando o uso dos adubos artificiaes, dos insecticidas e fungicidas e de processos culturaes aperfeiçoados; orientaram a hygiene para a maior duração da vida humana; melhoraram a producção do ferro, do aço, do aluminio, e fabricaram diversas ligas com que tem sido possivel construir não só machinas collossaes, os nossos navios e couraçados, as nossas locomotivas, os nossos automoveis e os novos engenhos de voar, como ainda fazer medições mais exactas e dar marcha mais regular aos nossos chronometros.

A sciencia que taes fructos tangiveis palpaveis, teem produzido, não é, não, um entretinimento esteril: é

um poder que mais alto se levanta

no mundo de hoje, accrescentando, por modo nunca sonhado, a riqueza nacional e particular, pelo aproveitamento, cada vez mais extenso, das energias e forças naturaes.

Quereis um exemplo, de entre muitos, demonstrativo do que vale a cultura da sciencia? Reparai na grandeza da producção da industria chimica allemã, que pouco mais tem de 30 annos: 1.600 milhões de producção annual; perto de 700 milhões de exportação; 9.000 fabricas; 200.000 operarios; 260 milhões de salarios, — tal foi o balanço d'essa industria em 1906.

Todas estas industrias, e a dos outros paizes, foram filhas das descobertas da sciencia pura, ou, mais exactamente, das descobertas das leis fundamentaes da chimica, realizadas nos fins do seculo XVIII pelo immortal genio de LAVOISIER!

Mas a sciencia não deve encarar-se só por este lado utilita-

rio; a sciencia é tambem educadora, emancipadora e collaboradora da alliança e paz universaes.

A sciencia, disse eu, *é educadora*.

Para os povos sonhadores, aventureiros, romanticos ou idealistas (e talvez tenhamos um pouco de tudo isto), nada mais proprio para disciplinar o espirito do que os ensinamentos da realidade, revelados pela observação dos seres e factos naturaes e pela experiencia; assim se rectificam preconceitos e se corrigem perniciosas inclinações de animo. O facto scientifico rigorosamente observado a todos obriga, porque todos o podem verificar; a lei natural, correlação necessaria entre os phenomenos, a todos se impõe, pelo mesmo motivo; não ha declamações oratorias, dissertações litterarias, ou discussões escolasticas, que os possam modificar, ou oppor-se aos progressos que d'elles dimanam. O alumno, que num laboratorio de chimica se exercita nas experiencias da analyse, aprende com ensinamentos eminentemente impressionantes que se não pode violentar a marcha das transformações materiaes, sem graves desgostos; e reconhece que, para obter os resultados desejados, deve sempre proceder conforme as condições necessarias á producção dos phenomenos; verifica a cada passo o aphorismo sempre verdadeiro de BACON: «*Natura parendo imperat*»: a natureza, mandando, obedece. Mal vae áquelle que tenta, por ligeireza, ou por outro motivo, forçar o curso dos phenomenos: será impiedosamente castigado e envergonhado.

E assim as sciencias, e particularmente a physica e a chimica, infundem, pelos seus ensinamentos, o vigor mental positivo nos organismos sociaes e disciplinam os espiritos irrequietos ou voluntariosos:

«Que lições tão necessarias, disse ainda ha pouco no congresso de Granada para o progresso das sciencias o sr. dr. CARRACIDO, para os legisladores, que creem presumidamente que a *Gaceta official* póde dar vida ao que não existe e reformar de subito as velhas instituições sociaes! Quanto aproveitaria a contemplação dos quadros da vida natural aos homens de estado e aos politicos que, apaixonados pelo que *deve ser*, impossibilitam a realização do que *pode ser!*»

Não só a sciencia é eminentemente propria para dar ao espirito a seriedade, a firmeza e a clareza de convicções que o tornam superior ás sugestões da vaidade e do interesse pessoal, o que é já uma concepção do dever, como tambem é uma escola de modestia e benevolencia. Referindo-se á astronomia, observa judiciosamente POINCARÉ que foi por ella que o homem primeiro

reconheceu que havia leis naturaes, conhecimento de um grande alcance e utilidade para as outras sciencias, que por sua vez investigaram e encontraram leis naturaes proprias; a astronomia forneceu-nos ainda outra noção — a do infinito do universo sideral, que nos subjuga e nos opprime: «nós sabemos, diz elle, que o sol está a 150 milhões de kilometros da terra e que as distancias das estrellas mais proximas são centenas de mil vezes maiores ainda». Habituados a contemplar este infinitamente grande, ficamos mais aptos a comprehender e a admittir o infinitamente pequeno, que egualmente nos opprime. E assim, quer no mundo revelado pelo telescopio, quer no que é apreciado pelo microscopio e o ultramicroscopio, as maravilhas do real, do que é, são incomparavelmente maiores, e mais bellas, do que quanto a phantasia mais possante podia imaginar, e surprehendem-nos a cada passo com o imprevisto, com o extraordinario! Basta dar para exemplo a perturbação trazida á physica e á chimica pela descoberta dos raios cathodicos e do radio.

Perante estas maravilhas do mundo material, que o homem vulgar ou a meia-sciencia é incapaz de apreciar, recolhe o espirito a noção da modestia e bondade. Sabemos todos, os que mais estudamos, os que mais descubrimos, bem pouca coisa perante os assombros do que existe. Os nossos systemas, as nossas theorisações, são todas provisorias e falliveis, em face da limitação do nosso saber e das immensas difficuldades da investigação. Como Newton, ou, melhor, com muito mais razão do que elle, reconhecemo-nos creanças perante os mysterios da natureza. Os nossos descobrimentos não são de molde a fomentar orgulhos e vanglorias: sejamos modestos e benevolentes; porque não podemos formular, nas sciencias que mais apaixonadamente cultivamos, construcções a que possamos dar o caracter dogmatico; sejamos moderados e discretos nas nossas affirmações.

Disse uma vez Pasteur que o livre pensamento não podia ser o pensar nada ou escravisarmo-nos á ignorancia; tambem não podia ser a liberdade de pensar mal ou a de nos deixarmos dominar pelas suggestões do instincto e despresar toda a tradição. A verdadeira liberdade de pensamento, é a liberdade absoluta da investigação, o direito inviolavel de concluir sobre o que é verdadeiramente accessivel á evidencia, e conformar com isso a nossa opinião, independentemente de toda a auctoridade, de toda a ideia preconcebida, de qualquer fanatismo ou superstição. Galileu dizia: «quando os decretos da natureza são ex-

postos aos olhos e á intelligencia de todo o mundo, a auctoridade d'este ou d'aquelle perde toda o poder sobre nós». A sciencia procura o que é, sem se inquietar um momento com as consequencias philosophicas que derivam das suas descobertas, nem com as difficuldades que possa levantar; os systemas e as doutrinas teem que subordinar-se aos factos. A sciencia verdadeira é, pois, a escola do livre pensamento, e, como tal, eminentemente *emancipadora*.

Só a meia ou a falsa sciencia é fanatica, é intolerante, é presumida, e pode ter a presumpção de dar soluções definitivas nos mais graves e transcendentaes assumptos. O homem de sciencia verdadeira tem as suas convicções sobre estas materias, comprehende e respeita as dos outros e faz uma lei de nunca perturbar uma consciencia.

Se a sciencia não tem pretenções (não as pode ter) a esclarecer-nos sobre a natureza intima das coisas, nem sobre as causas primeiras, mas se limita ao estudo restricto e positivo dos factos e ás leis dos phenomenos, e estes, como já dissemos, podem ser verificados em toda a parte — não ha duvida que é a unica disciplina capaz de crear a unanimidade entre os homens.

Assim a sciencia constitue um *principio de concordia* entre elles.

Os intuitos e a ambição dos seus cultores são, em regra, o de promover o interesse geral, o bem-estar e a felicidade dos homens.

A sciencia, por estes motivos, exerce uma acção de conciliação, de confraternidade e de solidariedade universaes. Estes sentimentos de confraternidade tendem a predominar, criam laços affectivos, concorrem, por isso, para suavisar os costumes e elevar a alma. As relações entre os sabios de todo o mundo nas academias e sociedades scientificas e nos congressos, que se vão multiplicando dia a dia, concorrem para o apaziguamento dos odios e rancores que algumas vezes existem entre os povos. A humanidade conduzida pela sciencia para a região serena da paz — eis o que muitos hoje poderão ter como utopia ou sonho, mas que poderá ser um dia realidade.

Conclusão necessaria de quanto tenho dito: A sciencia não é só porque cria riquezas, porque *fomenta os progressos materiaes*, e porque espalha a flux beneficios na sociedade; como porque é *educadora* do espirito e do caracter; como porque é *emancipadora* de preconceitos e *escola do pensamento livre;* como porque é *conciliadora*, tendendo a approximar os homens

pelos laços affectivos e de concordia; — a sciencia, digo, é verdadeiramente a bemfeitora da humanidade (Berthelot).

II

E porque a dignidade e importancia social da sciencia são tamanhas, causa extranhesa, e é motivo de pesar, consignar o facto real da quasi ausencia de nomes portugueses no livro de honra, onde se inscrevem os investigadores das leis naturaes. Não temos vivido a vida de laboratorio; somos forasteiros na nova obra da exploração da natureza; por causa da nossa esterilidade, limitamo-nos a meros copistas da obra dos outros povos onde se tem acclimatado a alta cultura, — que é a que hoje serve para qualificar e valorizar as nações.

O nosso mal foi tambem o da visinha Hespanha; e, para o explicar, aventou-se a ideia de que o trabalho scientifico experimental era incompativel com a viveza da imaginação d'aquelle povo, com a heterogeneidade dos elementos ethnicos que o formaram, em cujas veias corre o sangue semita, e com a amenidade do clima, a belleza do ceu e a feracidade do solo.

O meu collega, sr. dr. Carracido mostra com grande copia de argumentos que estas razões não colhem. Sem acompanhar o illustre cathedratico na sua brilhantissima exposição, confirmando a sua maneira de ver, permittir-me-hei dizer em reforço o seguinte.

A decadencia actual não pode ser devida á amenidade do clima, que nunca foi modelador de entendimento. No seculo xvi, no periodo aureo da nossa civilisação, fomos creadores e investigadores originaes: tivemos um mathematico dos mais illustres — Pedro Nunes, o naturalista Garcia da Orta e medicos tidos em todo o mundo scientifico como observadores sagazes e talentosos, como foi Amato Lusitano, cuja obra scientifica se acha tirada magistralmente do pó dos archivos pelo nosso estimado e sabio collega dr. Maximiano Lemos; como tiveram os hespanhoes um Acosta, o Humboldt do seculo xvi, que escreveu a *Historia natural y moral de las Indias*, obra no estylo do *Cosmos* e só com elle é comparavel; tiveram um Medina, e especialmente um Alonso Barba, auctor do livro *El arte de los metales*, que no Peru creou a metallurgia da prata pelo processo da amalgamação, metallurgia tòda hespanhola, como podereis ver consultando a obra de Hoefer sobre historia da chimica, ou ainda o volume respectivo da grande *Encyclopédie chimique* de Fremy.

Todos conhecem o accentuadissimo progresso das sciencias nos Estados Unidos, não obstante a variadissima procedencie da sua população. Foi na Alsacia, e na cidade de Strasburgo, que nasceram os quatro chimicos de stirpe germanica — Gerhardt, Wurtz, Schutzenberger e Friedel, que tanto concorreram, com o brilho das suas descobertas, para a marcha triumphante da chimica francesa na segunda metade do seculo xix. A heterogeneidade dos elementos ethnicos parece antes favorecer do que contrariar o trabalho scientifico.

A imaginação, pela sua parte, não é faculdade perturbadora da pesquisa original, antes é um auxiliar indispensavel, porque coordena, descobre ou prevê os elementos experimentaes da investigação. Na inauguração do monumento a Avogadro, que se realisou em Turin no dia 24 de setembro ultimo, data do centenario da publicação da sua notabilissima memoria sobre a constituição molecular dos gazes, o eminente chimico italiano, prof. Icilio Guareschi, denominou-o um verdadeiro *poeta da sciencia*, porque a imaginação teve grande parte na genial descoberta.

Não pode duvidar-se tambem de que uma sã phantasia entrou na constituição das theorias de Kekulé, de Fischer e de Lord Kelwin sobre diversos ramos de chimica e physica actuaes.

As razões da nossa decadencia scientifica, não considerando as luctas para a manutenção da nossa independencia nos começos do seculo xix, e as dissenções politicas intestinas que nos trouxeram em desasocego por largos annos até o meiado do mesmo seculo, são seguramente outras.

Alexandre Herculano, defendendo em 1841 a Escola Polytechnica como Escola Normal de ensino primario superior para o ensino das sciencias physicas e mathematicas, apontou, com a clarividencia do seu engenho, o mal da nossa instrucção; era o quasi exclusivo, que vinha de longe, da cultura classica, essencialmente rhetorica e litteraria:

«A instrucção publica em Portugal, dizia elle, tomada na sua generalidade, nas suas feições caracteristicas, e despresadas as excepções, nem pertence a este seculo, nem é progressiva, e por conseguinte nem é realmente util».

Referindo-se ao caracter predominante da instrucção nacional na epoca joannina e manuelina, accrescentava:

«Era o especulativo puro, o metaphysico, no rigor da significação grega desta palavra. Os reinados de D. Duarte, de D. Affonso V e de D. João II resplandeceram de moralistas, de historiadores, de poetas, de mysticos e ainda de oradores; — tudo quanto representa o mundo das ideias. Porém

a sciencia do mundo material, onde apparece ella durante esse largo periodo? Apenas na escola de Sagres. Todavia que livro ou que homem produziu essa escola? Nenhum. Os nomes que figuram por aquelles tempos pertencem unicamente á *mathematica,* e na mathematica espscialmente á *astronomia.* Ainda assim os sabedores conspicuos neste ramo de uma vasta sciencia eram quasi todos judeus e varios estrangeiros, devendo-se o incremento que ella teve, por um lado á superstição, porque se cria na astrologia; por outro lado, á ambição porque, já muito havia, as mentes dos principes volviam ideias de descobrimentos e conquista. Não era, pois, entre nós a mathematica mais que uma enxertia, uma excepção ou antes uma aberração das tendencias litterarias do país, devida a causas estranhas ao caracter da organisação social deste, e por isso de modo nenhum contraria á verdade do principio estabelecido».

. . . .

«E por isso que a monarchia absoluta, em toda a parte e em todo o tempo, em que se não converteu em tyrannia bruta e feroz, foi sempre intellectual, mas de uma intellectualidade perfumada, macia e brilhante, de uma *intellectualidade esteril,* porque *applicada exclusivamente ao especulativo;* intellectualidade de sala, de theatro, de galeria, de pulpito, de foro; intellectualidade boa e moral, que derrama lagrimas e esmolas sobre os miseraveis, mas que lhes recusa o baptismo da instrucção material, que não os obriga a trabalhar, nem os pune quando elles o recusam, nem promove o aperfeiçoamento industrial do país, contentando-se de uma caridade impotente porque, em vez de tomar o povo por alvo, toma o individuo, similhante áquelle que, em cidade devorada de sêde, em vez de conduzir para lá por aqueducto perenne as aguas caudaes de fontes vizinhas, andasse offerecendo de porta em porta sorvetes e limonadas de cheiro e sabor delicados; intellectualidade, enfim, de privilegio, que põe no logar de instrucção necessaria ao commum dos homens, a que serve só aos homens excepcionaes, e chama-lhe com simpleza, comicamente infantil, *instrucção publica,* sem que ella sirva de nada ao publico, que se compõe do grande numero das massas populares, dos homens activos, dos agricultores e dos industriaes, dos fabricantes e dos mercadores, e não dessas classes diminutas em numero, a que os economistas não consentem que eu chame *improductivas,* mas que pelo menos chamarei *semi-productivas.*

. . . .

«É por isso que, considerando attentamente a historia da instrucção publica entre nós, vemos nella as *tendencias exclusivamente litterarias,* no sentido restricto desta palavra.

. . . .

«A questão da Escola Polytechnica e do Collegio dos Nobres resume e representa a questão immensa do systema de instrucção nacional que ha de ser e da instrucção excepcional que foi e é; questão entre a educação e melhoramento dos agricultores, dos artifices, dos fabricantes e a propagação dos causidicos, dos casuistas, dos pedantes; questão entre o trabalho e o ocio; questão entre a granja e o côro da Sé; entre a palheta do estampador e a metaphora do sermão; entre a machina de vapor e o provará do rábula. Por isso ella é uma grave e importante questão.

. . . .

«Depois, que significa num país constitucional a desigualdade completa das classes, relativamente ao ensino publico? Com que razão ou justiça haverá a cargo do thesouro estudos custosos para os legistas, para os theologos, para os militares, para os medicos, para os cirurgiões, e não ha de haver: uma *granja-modelo* para se tornarem consumados na sciencia de agricultar os possuidores de grandes propriedades ruraes; *escolas indus-*

triaes para se fazerem insignes em suas profissões os donos ou directores dos grandes estabelecimentos d'industrias; *conservatorios d'artes e officios* para o aperfeiçoamento dos individuos que se dão ás artes fabris?

«São, porventura, ilotas os homens de acção e espartanos só os homens d'especulação? São, porventura, aquelles membros inuteis do corpo social, e estes os que os sustentam? Sobre cujos hombros pesa o maior vulto dos impostos d'ouro, de trabalho e de sangue? E que obrigação tem a grande maioria dos contribuintes de suarem e tressuarem para que se hajam de conservar os grandes estabelecimentos da chamada instrucção superior, e no fim terem um juiz a quem pagam pelas contribuições geraes do estado, um advogado a quem remuneram da sua algibeira quando delle precisam, um medico que os sára ou mata quando lhe dão dinheiro? E, responder-se-ha, porque a sociedade carece da existencia destas classes. Convenho: mas não carecerá a sociedade de lavradores, de fabricantes, de artifices? Eis o verdadeiro ponto da questão, que é representada de um lado pelo systema antigo, de outro pelo moderno; de um lado pelo Collegio dos Nobres, do outro pela Escola Polytechnica.

«Livre seja para os individuos cultivarem as letras; nobre e honroso é tudo quanto nos alevanta da terra: mas o governo de um país não é uma academia de poetas e de eruditos; o governar um país é o feitorisar uma grande casa; deve, por isso, o feitor ser positivo, economico e severo calculador. A instrucção publica é um *arroteamento;* e embora na terra cultivada de novo haja um cantinho para flores, é certo que as searas, as pastagens, as mattas e os pomares são o principal objecto dos cuidados de um bom administrador. De tudo o que nas sciencias e nas letras é puramente intellectual se compõe o jardim da republica; mas a renda della, os fructos de que se sustenta, só os produzem as *sciencias applicaveis* e *applicadas.*

«Tudo que não for organisar o ensino nacional sob a influencia deste pensamento, é não entender nem a sociedade, nem a nossa epocha, nem as circumstancias peculiares de Portugal.

«Digo circumstancias peculiares de Portugal, porque, além das considerações geraes já tocadas, ha uma especialissima e de grande monta que nos diz particularmente respeito.

«Vem esta a ser a de que estamos excessivamente pobres; triste verdade, da qual abraçados com a sombra vã do que fomos, não ha ahi voz que valha a persuadir-nos. Necessario é ao pobre o ser activo e industrioso, e não será decerto com o antigo systema de instrucção que o povo português progredirá na *industria.* Quando os diamantes e o ouro do Brazil vinham inundar Portugal de riquezas; quando D. João V comprava a Roma, a venal, as pompas pontificaes para alegrar seus ocios; quando este principe, émulo de Luiz XIV, incumbia ás artes bastardas e corruptas do seu tempo que lhe erguessem a magnifica ninharia de Mafra; então era preciso entulhar de frades, de capellães, de conegos, de monsenhores, de principaes, de escribas, de desembargadores, de caturras, de rimadores de epithalamios e de elegias, de oradores academicamente impertinentes, o insondavel sorvedouro das inutilidades publicas. Como d'outro modo devorar as entranhas da America? Esta era a grande industria portuguêsa de então; para ella se deviam affeiçoar os estudos. O thesouro do estado substituia a acção dos homens. Com agentes espertos para vender diamantes na Hollanda e obreiros habeis para cunhar ouro nos paços da moeda, estavam suppridos trabalhos, instrucção popular, actividade, tudo. Era aquella uma epoca brilhante; mas passou. De quanto possuiam nossos avós só nos resta uma tradição saudosa, o arrasamento industrial, e a triste realidade da miseria publica.

«Cumpre-nos acceitar esta com hombridade, isto é, resignados e resol-

vidos a recuperar com o trabalho o que perdemos com o ocio. As conquistas não voltarão mais, porque já não ha novos mundos para devastar, e as nossas esperanças devem dirigir-se para um solo fertil, visitado pela benção de Deus; para a intelligencia nacional, de que a providencia não foi escaça comnosco.

«Para converter aquelle em manancial de riqueza, e esta em instrumento de prosperidade, é mister accommodar ás necessidades presentes o systema de instrucção publica; e do que fica dito me parece deduzir-se com evidencia que o actual, nos seus caracteres essenciaes, é inteiramente contrario a essas necessidades.

. . . .

«A consequencia deste estado de cultura intellectual, falsa, inapplicavel e violenta, é que as muitas esperanças mentidas, as muitas ambições recalcadas, todos os annos arremessam para a arena dos bandos civis centenares de corações generosos, que, insoffridos ante um prospecto de miseria, se arrojam ás lides politicas, para perecerem ou prearem no cadaver defecado do patrimonio da republica.

«E ainda o mal seria menor se ao lado desta decepção houvesse alguma grande verdade; se uma escola de applicação material estivesse patente á juventude entre cada dez daquellas em que se ensinam *disciplinas puramente litterarias*. Ao menos havia para ella a escola! Mas não acontece assim. Para os mancebos de mediocre engenho, desprovidos de protecção e inhabeis em enredos politicos, sobre o ádito da instrucção publica em Portugal está escripto um distico, invisivel aos olhos dos desgraçados, mas fatal, immutavel e terrivel, o distico que o cantor ghibelino de Florença escreveu com a sua pena de bronze sobre a porta do inferno:

Per me si va tra la perduta gente:
Lasciate ogni speranza voi ch'intrate.

«A nossa legislação sobre ensino publico é pela maior parte moralmente assassina, e os seus assassinios vão medidos pelos sonhos de Nero e revestidos do caracter de Judas: porque, tomando a mocidade inteira como um individuo, ella saúda e beija as victimas, para as apunhalar em massa nos seus futuros destinos.

. . . .

«O que elle (o homem do povo) vos agradecera fôra que o habilitasseis com os elementos das sciencias naturaes, accommodados tanto á sua capacidade como aos seus destinos: que lhe revelasseis os conhecimentos applicaveis á vida material; que lhe ensinasseis o desenho linear, a geometria pratica, os rudimentos e factos importantes da physica, da chimica, da botanica, e as regras geraes de hygiene popular; que o instruisseis na doutrina clara e simples do Evangelho, para não ser um idolatra ou um malvado».

A proposito do *Instituto das sciencias physicas e mathematicas*, creado em 1835 por RODRIGO DA FONSECA, escreveu HERCULANO:

«Quanta ignorancia, quanto pedantismo, quanto medo da civilização havia por almas curtas e rasteiras, quanta preguiça, quanta incapacidade havia por nossa terra, — tudo gemeu, gritou e grasnou insultos, ponderações, reflexões eruditas, argumentadas, suporiferas. Foi um rebate geral em nome do digesto e dos supinos, dos canones e da syntaxe figurada, da exe-

gese e dos affectos oratorios, da graça efficaz e do *humano capiti cervicem pictor equinam,* do codigo theodosiano e das sorites de Genovesi.

«Não houve remedio; a campa caiu sobre a physica, a chimica, a botanica, a mathematica, a astronomia, e, em cima dellas, assentaram-se remoçados, alindados, triumphantes, o digesto, os supinos, os canones, a syntaxe, a exegese, os affectos, a graça, o *humano capiti,* o codigo e as sorites. Então as cinzas de João Pastrana, do padre Alvares, do licenciado Martim Alho, do doutor João Façanha, de Cataldo Siculo, de Jeronymo Caiado agitaram-se como querendo renascer á vida, e do fundo dos seus sepulchros soou uma voz sumida que dizia — *Io triumphe! io triumphe!*»

A respeito da lei de 17 de novembro de 1836, referendada por Passos Manoel, que reformou a instrucção secundaria a qual visava a fornecer ás grandes massas de cidadãos, que não aspiravam aos cursos superiores, os elementos scientificos e technicos indispensaveis aos usos da vida no estado actual das sociedades, dizia o mesmo eminente escriptor:

«Assim mesmo ella foi sophismada e inutilisada: os lyceus nunca se organizaram, e o latim e a rhetorica, encantoados por toda a parte como dantes, riem-se da lei que os aposentava nas capitaes dos districtos; diariamente se pedem á camara dos deputados cadeiras de latim. Parece que os agricultores de Portugal, como o Triptolemo de Walter Scott, pretendem arar e cavar pelo systema de Virgilio, Columella e Varrão; que as *tigna bina sesquiquipedalia* de Cesar são os modelos das nossas construcções; que nas tusculanas de Cicero se acham as receitas necessarias para estampar chitas ou tecer burel e saragoça; que na historia natural de Plinio se encontram todos os apontamentos precisos para conhecer os usos domesticos e as virtudes medicinaes das plantas do nosso país; e que, enfim, na *Ars amandi* de Ovidio, nas poesias de Catullo ou no *Satyricon* de Petronio Arbitro está a flôr e nata da crença no nosso Deus, dos principios da nossa moral, dos incentivos do nosso amor da liberdade e da patria!

Foi, de facto, depois da Revolução de Setembro que se começou a entender melhor a questão da instrucção nacional; mas com muita lentidão e embaraços se tem caminhado, e, o que é peor, com uma comprehensão inexacta dos meios de estudar devidamente as sciencias entre nós.

III

Para promover trabalhos scientificos é primeiro que tudo manifestamente indispensavel proceder por forma que elles sejam possiveis. Não bastam homens de talento, intelligentes, sabedores, com gosto pelos estudos serios e vontade firme de se consagrar a elles; se os meios de trabalho lhes faltarem, nada produzirão. Isto é fatal.

A verdadeira cultura scientifica será sempre um mytho, quando não existirem os factores essenciaes á sua elaboração. Quaes esses factores? É deste ponto que me vou occupar, seguindo a muito lucida exposição feita já ha bastantes annos pelo professor Louis Henry.

As condições, as exigencias do trabalho e pesquizas scientificas, são de duas ordens — umas, a que chamarei *intellectuaes*, outras *materiaes*.

«São meios intellectuaes os objectos immediatos de estudo propriamente dito, isto é, as collecções de revistas e periodicos scientificos, as memorias e os livros. Querer trabalhar sobre um determinado assumpto sem saber o que já foi feito e está descoberto nessa direcção, é correr o risco de consumir a actividade em effeitos estereis, com os quaes nada mais se poderá conseguir que encontrar o que já anteriormente foi feito e servir-lhe de confirmação; seria quasi perder o tempo. Impõe-se, portanto, que as faculdades disponham de *bibliothecas* bem sortidas de livros e periodicos, e que assignem e tenham em dia as revistas scientificas importantes. Não quer isto dizer que o professor digno deste nome não tenha a sua bibliotheca privativa com os livros de uso mais frequente; mas ha obras de consulta necessarias para este ou aquelle trabalho a dirigir ou a realisar, que só as boas bibliothecas devem ter e fornecer».

Mal iria a um homem de sciencia portugues, que deseja conhecer a bibliographia dum assumpto scientifico, ter de fazer uma viagem a uma universidade francesa, allemã ou italiana, para consultar as revistas de especialidade e o que ha já feito sobre um determinado assumpto.

Esta miseria, outro nome não tem, é real entre nós, digamo-lo clara e explicitamente.

Á posse destes meios intellectuaes quasi se limitam as exigencias das mathematicas puras e de todas as sciencias abstractas, cujo objecto immediato não é a materia. No meio dos embaraços e das difficuldades do trabalho experimental é esta uma situação privilegiada, que é para invejar ao nosso eminente Reitor, dr. Gomes Teixeira e aos seus collegas da secção de mathematicas puras.

«Mas as sciencias naturaes ou meramente passivas, reponsaudo sobre a observação, ou activas, tendo por base a experiencia, reclamam, além dos livros, outros instrumentos de estudo. Vivem estas sciencias de ideias; repousam, porém, sobre factos; e as faculdades teem de proporcionar aos professores que, por dever de cargo, se occupam destas sciencias, os *meios materiaes* do trabalho scientifico.

«Para as sciencias naturaes propriamente ditas são necessarias, primeiro que tudo, *collecções* tão completas quanto possivel, pelo menos dos objectos importantes e caracteristicos. Não pode a historia natural ser ensinada como a historia politica. Para fazer conhecer o que é, o melhor meio é mostrar os objectos; a descripção, por mais perfeita que seja, fica sempre abaixo da apresentação delles. As collecções são a base de ensino, quer para o professor, quer para o alumno; e são o objecto immediato e indispensavel para aquelle. O naturalista só conhece bem o que elle mesmo viu de perto, o que observou e tocou com as mãos.

«Para toda a gente, mas principalmente para aquelles que se occupam das sciencias experimentaes, são indispensaveis locaes apropriados aos estudos praticos — o que se chama *laboratorios*.

«Os laboratorios devem ser convenientemente installados; o professor que ahi vive a maior parte da sua vida, deve encontrar nelle ar, luz e espaço sufficientes, para resguardo da sua saude, no estudo serio e aprofundado dos phenomenos naturaes. Não precisamos, nem podemos exigir, edificios sumptuosos, como aquelles que se teem levantado em alguns países; mas devem dar-nos os locaes espaçosos e em condições de tornar facil o trabalho experimental.

«Devem estes laboratorios dispor de uma dotação sufficiente; pretender trabalhar sem os *recursos* necessarios é o mesmo que pretender exercer uma arte sem as ferramentas indispensaveis: — é querer o impossivel. Poucos trabalhos referentes ás sciencias physicas poderão ser hoje proveitosamente emprehendidos sem um certo apparato instrumental.

«Ao laboratorio deve estar consignado o *pessoal* sufficiente de ajudantes, assistentes, collaboradores e preparadores, praticantes e serventes. O professor não pode nem deve fazer tudo. Nas sciencias experimentaes o trabalho scientifico comprehende o pensamento dirigente e a sua realisação material; esta é, na maior parte, longa e laboriosa; seria pouco proprio da dignidade de um investigador ou de um sabio, ou ter em pouca conta o valor do seu tempo, executar elle proprio muitas operações que o pessoal subalterno pode e está habituado a fazer, e que não melhorariam a sua habilidade experimental. A razão da fecundidade, que por vezes nos assombra, de certos homens de sciencia estrangeiros está justamente em que os seus laboratorios não estão desertos, em que elles não se encontram sós, mas que a seu lado trabalha gente nova, ávida de saber, animada pelo enthusiasmo communicativo dos mestres, e ajudando-o a realizar o seu pensamento».

O numero de assistentes para coadjuvar os alumnos nos trabalhos praticos deve ser proporcionado ao numero delles, para que o ensino valha.

No Congresso de chimica applicada, que se realisou em Turim em setembro de 1903, o professor Cannizzaro, disse:

«Sem o auxilio e a cooperação de assistentes em numero sufficiente, é impossivel que os alumnos adquiram a technica necessaria aos futuros trabalhos. Por este lado, resente-se, de um modo particular, a mesquinhez das dotações annuaes dos laboratorios, aos quaes pouquissimo ajudam as propinas pagas pelos alumnos.

«Eu, velho mestre de Escola, sei por experiencia que, se confiardes mais de 25 alumnos a cada assistente, a vossa escola não dará proveito. Esta questão dos assistentes deve-se recommendar de modo muito particular ao governo».

Gilbert, o celebre professor da Universidade de Lovaina, proferiu um dia as seguintes judiciosas palavras:

«Um laboratorio de chimica, de physica, de mineralogia, é hoje em dia uma officina de precisão, na qual as investigações exigem apparelhos que custam caro, pessoal intelligente e adestrado, coisas estas tambem dispendiosas; mas a dignidade do ensino e os progressos da sciencia dependem dellas. Toda a instituição digna deste nome, ciosa de se conservar á altura da sciencia e mesmo de contribuir para as suas descobertas, deve saber, á custa de grandes sacrificios, dotar largamente os seus laboratorios e as suas collecções. Se intende que isto custa muito caro, poderá produzir sonhadores e fazer commercio de diplomas; mas não tem o direito de fallar de sciencia».

Fechar ao homem de sciencia os laboratorios, ou não os dotar sufficientemente, é condemna-lo á esterilidade, é estancar a sua actividade. Pretender dar bom ensino scientifico sem esses meios — é querer edificar sobre areia.

Carecem as nações, disse uma vez Berthelot, de fornecer aos professores do seu ensino superior e aos investigadores os recursos necessarios para o seu trabalho e descobertas.

Mas precisam tambem de retribuir os seus serviços de modo a que elles possam considerar resolvido, embora modestamente, o problema da sua vida, a salvo de preoccupações materiaes, de sorte que possam dedicar-se por completo ás suas funcções. É assumpto capital, mas em que não insistimos; apenas consignaremos que o nosso professorado superior está miserrimamente retribuido, e sem nenhuns estimulos para o trabalho.

E ainda tudo não está feito. É preciso modificar o meio social, illustrando-o e interessando-o no sentido de reconhecer a

necessidade dos trabalhos experimentaes e a importancia dos laboratorios para todas as ordens de vida e de prosperidade nacional. O que distingue hoje as nações cultas das incultas é justamente este apreço á vida do laboratorio e aos seus heroes.

Nos países que nos devem servir de modelo não ha só solemnidades litterarias, ou assembléas politicas; e nas praças publicas não se levantam só estatuas a grandos cabos de guerra, a artistas, litteratos e politicos; celebram-se em toda a parte os grandes homens de sciencia, que fazem a gloria e o ascendente da sua patria.

É preciso ainda que se estimule o trabalho scientifico por meios adequados: — quer por concursos com premios sobre questões propostas que involvam investigações e trabalho de laboratorio; quer pela creação de premios ou recompensas especiaes a trabalhos já feitos e publicados; quer conferindo subsidios ou bolsas para animar trabalhos originaes a fazer ou a concluir, dentro ou fora do país.

Lembrando estes meios, não insisto sobre elles, para não allongar demasiado esta oração.

Mas é indispensavel que a todos estes elementos attenda quem pretender resolver o problema de modo que não continúe a alluvião ou legião dos doutores politicantes e improductivos, de que fallava Herculano.

IV

Senhor Ministro,

Vae adiantada a hora e é tempo de terminar; por de mais tenho occupado a vossa attenção.

Permitti-me que, antes de findar vos assevere que nunca poderia ser meu intento aproveitar esta occasião solemne para vos expor algumas deficiencias, que as tem, a nova reforma dos estudos. Se assim fizesse, corresponderia mal á subida honra que nos déstes vindo aqui. Sei aliás os intuitos levantados e nobres do estadista que a promoveu. A occasião é de congratulações. Os intuitos de todo o corpo docente desta Universidade, posso com affoiteza dize-lo, são collaborar com o Governo, com sinceridade, lealdade e boa-vontade, no resurgimento dos ramos de instrucção publica aqui professados. Está na nossa tradicção, e é nosso dever, solicitar o aperfeiçoamento do ensino; continua-lo-hemos. Esta zona do norte do país, onde a população é mais densa, e onde a industria agricola e outras teem já desen-

volvimento, carece por certo que aqui se ministre o ensino apropriado e fecundo: a Faculdade technica, ou de sciencias applicadas, visando a esta caracteristica regional, carece organisar-se sem demora em moldes scientificos, práticos e utilitarios, tendo uma solida base de estudo de *chimica applicada* á industria e á agricultura.

Se aqui patenteei a nossa deficiencia de producção scientifica, não foi para infundir desanimo, mas para sanar o mal e levantar o espirito publico. Se a Italia, para entrar decedidamente no convivio das nações cultas e fomentar a sua riqueza publica e o seu desenvolvimento industrial, curou, antes de tudo, de aperfeiçoar o seu ensino, e especialmente o universitario, e conseguiu o seu fim; se a nossa visinha Hespanha vê crescer dia a dia a sua producção scientifica nacional, e melhorar os productos das suas fabricas, depois que, perdidas as colonias, reconheceu que a sua regeneração só lhe podia advir da cultura scientifica, fonte viva do aproveitamento das energias naturaes; se o Japão, que durante seculos permaneceu sumido num somno profundo, accordou, enchendo de assombro o mundo, mercê da cultura das sciencias; se vivem felizes e rodeados da consideração universal essas pequenas nações da Escandinavia, onde a sciencia tem altares e valorosos e illustres adeptos; — porque não havemos nós de levantar a nossa mentalidade decadente, e, por assim dizer, atrophiada, e alcançar a nossa regeneração moral e economica, desde que os homens de estado, illustrados e intelligentes como vós, orientem devidamente a causa da instrucção nacional e fomentem a sério a cultura scientifica?

Por mim creio confiadamente no exito desta tentativa, porque a raça portuguêsa se tem mostrado, sempre e em todos os tempos, nobre, intelligente e tenaz nos seus emprehendimentos.

V

Mancebos estudiosos que me ouvis,

Permitti-me que vos recorde alguns factos interessantes que respeitam aos grandes homens de sciencia, que estáes habituados a admirar.

Numa festa que ha vinte sete annos, em abril de 1884, celebrou a Universidade de Edimburgo em honra de Pasteur, este, dirigindo-se aos alumnos, disse: «Desde que me conheço

homem, penso nunca me ter abeirado de um estudante sem lhe dar este conselho: *Trabalhe*, porfie; só o trabalho nos entretem e distráe verdadeiramente, e só elle aproveita ao cidadão e á patria».

Ramon y Cajal, o grande professor e histologista gespanhol, disse tambem: «Hoje só são toleradas as nações pequenas com a condição de nellas se render culto á sciencia. Façamos como a Belgica, a Suissa e a Hollanda. Abandonemos todo o sonho de conquista, todo o pensamento de grandeza militar; reconheçamos que para isso não servimos. *Trabalhemos!* Porque assim nos não hão de sacrificar. E não nos sacrificarão em nome de nenhum principio moral, mas sim no de uma regra egoista, tacitamente acceita por todos os povos superiores, e applicada principalmente ás nações primitivas da Asia e da Africa: a de considerar como illegitimo o direito á vida a toda a raça que não tenha collaborado no progresso scientifico e não tenha sabido, por essa collaboração, fonte de riqueza e bem estar, fazer-se estimar e respeitar pelas outras nações».

E Ferreira Lapa, em 1870, o homem illustre entre os que mais o foram neste país, o creador da agronomia scientifica nacional, proclamava por sua vez esta verdade, que oxalá fosse ha mais tempo bem conhecida: «No gremio dos povos civilisados só são contados e considerados os países que saibam tirar partido, por meio da sciencia e do *trabalho,* das suas condições naturaes».

Mancebos, para quem esta festa é principalmente destinada, vós que deveis ser, que sois, a alegria, a esperança, a generosidade, ouvi tambem a minha voz, que por não ser tão auctorisada, não é menos sincera: sede diligentes, activos; o trabalho faz parte da felicidade; procurai por elle, auxiliando os vossos mestres, levantar a patria commum pela cultura das sciencias.

Disse.

NOTAS

Pag. 199. — Numa nota publicada nos *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, de Paris, t. LXVII (1868, 21 sept.), pag. 597-614, sob o titulo — *Remarques sur l'affinité*, DUMAS dá conta dos trabalhos chimicos de NEWTON e das suas ideias sobre a affinidade. Esta nota está transcripta nas *Leçons de Chimie*, de ALFRED RICHE, Paris, 1878, t. I, pagg. 704-724.

Pag. 200. — As ideias de muitos dos homens da Revolução a respeito da cultura scientifica eram retrogadas e obscurantistas. FOURCROY, que investia contra as «gothicas universidades», tinha a apoia-lo um JEAN-BON SAINT-ANDRÉ, um COFFINHAL e outros (BERTHELOT, *La Révolution chimique — Lavoisier*, pagg. 18, 119, 194, 197, 198, 200, 204 e 205). No artigo sobre o *Centenario da sociedade philomatica*, BERTHELOT refere-se não sómente a BOUQUIER e FOURCROY, como tambem a SIEYÈS, DAUNOU e BOURDON, de espirito tão obcecado que desconheciam a utilidade da cultura geral e das sciencias em particular para manter o prestigio moral e a força material das sociedades (BERTHELOT; *Science et morale*, pagg. 85, 223-225).

Pag. 200. — Sem estarmos de accordo com as doutrinas philosophicas de BERTHELOT, em que a sciencia é elevada á altura duma metaphysica e duma religião, é de rigor affirmar que nas suas obras *Science et morale*, *Science et livre pensée*, *Science et éducation*, e, dum modo menos dogmatico e mais verdadeiro, na *Science et philosophie*, o grande mestre faz a apreciação exacta dos beneficios que a sciencia trouxe ao mundo moderno. No seu notavel artigo com o titulo — *Le crédit de la science* (publicado em *La Revue scientifique*, de 1 de novembro de 1902), e no seu prefacio á *Bible de l'humanité*, de MICHELET, SULLY PRUDHOMME mostra quanto é exagerado e erroneo, considerar a sciencia como *unico meio* de attingir a verdade e como *factor unico* dos sentimentos de confraternidade universal. Parece-me mais conforme com a realidade adoptar a formula de PASTEUR, na apreciação dos phenomenos moraes e da consciencia religiosa. Vejam-se VALLERY-RADOT, *La vie de Pasteur*, pag. 360; o livro de RENAN, *L'avenir de la science*, pagg. 95-96; e os intessantes excerptos dos discursos de PASTEUR sobre a methodologia scientifica e os limites da sciencia em GAY (JULES), *Lectures scientifiques*; *Physique et chimie*; 2.ª éd., Paris, 1906, particularmente pagg. 776, 794 e 796. Neste mesmo livro está a citação de GALILEU, pag. 753.

Pag. 201. — A importancia da industria chimica allemã está elegantemente tratada no livro de JULES HURET, *En Allemagne — Rhin et Westephalie*, Paris, 1907, pag. 106. O meu collega sr. prof. CASARES GIL, da Universidade Central de Madrid, cita este livro no seu *Discurso inaugural de la seccion 3.ª del tercer Congreso de la Asociación Española para el progresso de las ciencias* (*El Monitor de Farmacia*, n.º 569, de 15 de julio de 1911, pagg. 305-311).

Pag. 202. — A citação de H. POINCARÉ é do seu livro — *La valeur de la science*, pag. 165.

Pag. 204. — Sobre a influencia pacificadora da sciencia, veja-se VALLERY-RADOT, *La vie de Pasteur*, pag. 552.

Pag. 205. — A phrase de BERTHELOT, muitas vezes citada: «*La science*

est la bienfaitrice de l'humanité» foi por elle proferida em resposta aos discursos e congratulações que lhe foram dirigidos em 24 de novembro de 1901, por occasião das festas do seu quinquagenario scientifico — (*Science et livre pensée*, pag. 405).

Pag. 205. — Sobre as causas de esterilidade da cultura scientifica em Hespanha são dignas de ler-se as notaveis publicações do nosso eminente collega e amigo sr. prof. José R. Carracido, director da Faculdade de Pharmacia da Universidade Central de Madrid, a saber: *El problema de la investigación cientifica en España*, Madrid, 1911 (Conferencia feita no Congresso de Granada, de 1911, na Associação hespanhola para o progresso das sciencias, e *Estado actual das sciencias physico-chimicas* em Hespanha, com que abre o vol. III (1907) da *Revista de chimica pura e applicada*. É impressionante tambem o seu discurso proferido no Senado hespanhol em 25 de novembro de 1910, em replica ao antigo ministro sr. Rodrigues San Pedro. Sobre os trabalhos notaveis de homens de sciencia de Hespanha no periodo aureo da sua grandeza — como Acosta, Medina e o abbade Alonso Barba, merece ser lido o seu discurso de recepção na Real Academia hespanhola, intitulado *Valor de la literatura cientifica hispano-amecana*, Madrid, 1908.

Pag. 205. — Na sua *Histoire de la chimie*, 2e éd., Paris, 1869, t. II, pagg. 305-311, Ferdinand Hoefer dá conta da obra metallurgica de Alonso Barba. Na sua *Métallurgie de l'argent*, Paris, 1885, pagg. 209-285, C. Rosvag refere-se tambem á obra do sabio ecclesiastico hespanhol. (O livro de Rosvag faz parte da *Encyclopédie chimique*, de Fremy, t. v, 2e partie, *Métallurgie*, 7e cahier).

Pag. 206. — Um extracto do discurso do prof. Icilio Guareschi na inauguração do monumento a Avogadro em Turim, em que elle se refere ao papel da imaginação nas descobertas scientificas, encontra-se em *L'industria chimica*, Torino, anno XI, n.º 19, 10 octobre 1911, pag. 300: chamando a Avogadro verdadeiro poeta da sciencia, approxima-o de Dante e Galileo, Newton e Shakespeare, Kepler e Goethe, verdadeiros genios creadores, e que o tempo não faz senão tornar cada vez mais gigantes e tornar o seu nome mais fulgente». O sr. prof. Carracido tinha antes de Guareschi proferido no Congresso de Granada as seguintes formosissimas phrases: «*Y hasta me atrevo a sostener que en el vasto sistema de las investigaciones fisicas de Lord* Kelvin, *y en el de las investigaciones quimicas de* Fischer *para descubrir y coordenar los elementos que los forman, intervino la fantasia en grado no menor que en las obras de* Shakespeare *y de* Goethe *para crear y poner en accion los personages de las obras de estos colosos de la poesia*».

Pag. 206 a 209.—As opiniões de Alexandre Herculano sobre os defeitos de que padeceu durante largo tempo a instrucção publica nacional encontram-se no vol. VIII dos seus *Opusculos*, Lisboa, 1901, pagg. 56–76, quando se occupa «*Da Escola Polytechnica e do Collegio dos Nobres*». Foram artigos publicados em 1841, em defesa da Escola.

Pag. 209. — Sobre a creação do ephemero *Instituto das sciencias physicas e mathematicas*, e a sua organisação pode ver-se a *Historia dos estabelecimentos scientificos, litterarios e artisticos de Portugal nos successivos reinados da Monarchia*, por J. Silvestre Ribeiro, t. VII, Lisboa, 1878, pagg. 230, 232 e 233 e 335-346.

Pag. 210. — Os preliminares do decreto de 17 de novembro de 1836, que reformou a instrucção secundaria, começam assim: «Attendendo a que a instrucção secundaria é de todas as partes da instrucção publica aquella que mais carece de reforma, porquanto o systema actual consta na maior parte de alguns ramos de erudição esteril *(sic!)*, quasi inutil para a cultura das sciencias, e sem nenhum elemento *(sic!)* que possa produzir o aperfeiçoamento das artes e os progressos da civilização material do país; attendendo a que não pode haver illustração geral proveitosa, sem que as grandes massas dos cidadãos», etc.

Pag. 211. — O sr. prof. Louis Henry é o mestre eminente da chimica pura na Belgica e o seu representante mais auctorisado. É membro correspondente do Instituto de França e socio honorario da Sociedade chimica da Belgica. A conferencia que elle fez em 22 de abril de 1879, na assembleia geral da Sociedade scientifica de Bruxellas, é de data já antiga, de ha 23 annos; comtudo exprime de um modo actual, e com clareza e precisão notaveis, as exigencias da cultura scientifica, a ponto de a adaptarmos á nossa exposição sem sensiveis alterações. O titulo da conferencia do prof. Henry é: *De la science et des conditions du travail scientifique au point de vue des universités catholiques et de la Société scientifique de Bruxelles;* Bruxellas, 1879; 1 op. de 24 pag.

Pag. 213. — As palavras de Cannizzaro a respeito dos assistentes estão reproduzidas na *Revista de chimica pura e applicada,* t. vii (1911), pag. 96, e na *Chimica inorganica* de Pollacci, t. ii, pag. xii.

Pag. 215. — As ideias de Ramon y Cajal estão consignadas em excerpto na *Rovista de chimica pura e applicada,* t. vii (1911), pagg. 104–106; e as de Ferreira da Lapa na 1.ª conferencia que faz parte do *Relatorio da missão agricola na provincia do Minho no anno de 1870.* (15 de agosto a 15 de setembro). Lisboa, 1 vol. in-4.º

ANALOGIES DANS LA COURBURE DES COURBES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE

PAR

M. C. SERVAIS

Professeur à l'Université de Gand

---

§ I

1. Notations. On désigne par

M un point d'une conique Σ,
m, m_1 la tangente et la normale en ce point,
M_1 le centre de courbure de Σ au point M,
Q un point quelconque de la tangente m,
q la polaire de Q relativement à Σ,
q_1 la conjuguée normale de q,
S un point quelconque du plan de la conique,
Q_1 le point (m_1, q_1),
S_q le point d'intersection de m_1 avec la parallèle menée par S à la droite q,
S_{q_1} le point d'intersection de m_1 avec la parallèle menée par S à la droite q_1,
A la trace de la tangente m sur l'axe de symétrie a_1,
B la trace de la tangente m sur l'axe de symétrie b_1,
D le point à l'infini de la tangente m,
P le pôle de la normale m_1.

2. Q, R, S *étant trois points quelconques de la tangente* m *au point* M *d'une conique* Σ, M_1 *le centre de courbure au point* M, *on a*

$$MM_1 = S_{q_1} S_{r_1} \frac{MQ \cdot MR}{SM \cdot QR}.$$

Les droites (q_1, r_1, s_1, ...) correspondant aux points de la ponctuelle (Q, R, S, ...) enveloppent une parabole tangente aux droites m et m_1 aux points P et M_1, et on a

$$(M\ M_1\ Q_1\ R_1\ S_1\ \ldots\ldots) \barwedge (P\ M\ Q\ R\ S\ \ldots\ldots)$$
$$(P\ M\ Q\ R\ S\ \ldots\ldots) \barwedge (m_1\ m\ q\ r\ s\ \ldots\ldots)$$
$$(m_1\ m\ q\ r\ s\ \ldots\ldots) \barwedge (S_{p_1}\ S_{m_1}\ S_{q_1}\ S_{r_1}\ S_{s_1}\ \ldots\ldots).$$

Or

$$S_{s_1} \equiv S_1\ ,\quad S_{p_1} \equiv M\ ,\quad S_{m_1} \equiv \infty$$

on a donc les ponctuelles projectives

$$(M\ M_1\ Q_1\ R_1\ S_1\ \ldots\ldots) \barwedge (M\ \infty\ S_{q_1}\ S_{r_1}\ S_1 \ldots\ldots)$$

dont les éléments doubles sont M et S_1 ; par suite

$$(M\ S_1\ Q_1\ S_{q_1}) = (M\ S_1\ M_1\ \infty)$$

ou

$$(M\ S_{q_1}\ Q_1\ S_1) = (M\ \infty\ M_1\ S_1)$$

en développant

$$M\ M_1 = S_{q_1}\ S_1 \frac{M\ Q_1}{S_{q_1}\ Q_1} = S_{q_1}\ S_1 \frac{M\ Q}{S\ Q}\ .\ [1]$$

Si $Q \equiv D$ on a

$$M\ M_1 = S_{d_1}\ S_1\ .\ [2]$$

On a aussi

$$S_{q_1}\ S_1 = S_{q_1}\ S_{d_1} + S_{d_1}\ S_1 = S_{q_1}\ S_{d_1} + M\ M_1$$

donc

$$M\ M_1 = (S_{q_1}\ S_{d_1} + M\ M_1) \frac{M\ Q}{S\ Q}$$

ou

$$M\ M_1 = S_{q_1}\ S_{d_1} \frac{M\ Q}{S\ M}\ .$$

On a de même

$$M\ M_1 = S_{r_1}\ S_{d_1} \frac{M\ R}{S\ M}\ .$$

---

[1] C. Servais, *La courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité* (Mémoires de l'Académie royale de Belgique, 1898, p. 39).
[2] Ribaucour, Nouvelles Annales de Mathématiques (2), vii, p. 172.

De ces égalités on déduit

$$MM_1\left(\frac{1}{MQ}-\frac{1}{MR}\right)=\frac{1}{SM}(S_{q_1}S_{d_1}-S_{r_1}S_{d_1})$$

ou

$$MM_1=S_{q_1}S_{r_1}\frac{MQ\,.\,MR}{SM\,.\,QR}$$

formule qui renferme les précédentes.

3. Par tout point S_{q_1} de m_1 on mène une parallèle à l'axe de symétrie a_1; cette parallèle coupe m en un point désigné par Q'; on a, S étant sur m

$$(M\,M_1\,Q_1\,\ldots\ldots)\;\overline{\wedge}\;(M\,\infty\,Q'\,\ldots\ldots)$$

ces ponctuelles sont perspectives, donc la droite Q_1Q' passe par un point fixe F. Ainsi:

Si S *est un point fixe de la tangente* m, Q *un point variable de la même droite, les perpendiculaires abaissées des points* S *et* Q *sur la polaire de* Q, *rencontrent la normale* m_1 *en deux points* S_{q_1} *et* Q_1; *la parallèle menée par* S_{q_1} *à l'axe de symétrie* a_1, *rencontre la tangente* m *en un point* Q' *tel que la droite* Q_1Q' *passe par un point fixe* F. *Ce point* F *est situé sur la perpendiculaire élevée au centre de courbure* M_1 *sur la normale* m_1.

Cas particuliers. *a*) $Q\equiv A$. La droite SA_1 passe par F.

b) $Q\equiv S$. La droite S_1F est parallèle à l'axe de symétrie a_1.

c) $Q\equiv D$. La parallèle menée par S_{d_1} à l'axe a_1 coupe m en un point D' tel que $D'F$ est parallèle à la normale.

4. Le point S étant un point quelconque du plan de la conique Σ on a

$$(M_1\,M\,Q_1\,R_1)\;\overline{\wedge}\;(M\,P\,Q\,R)\;\overline{\wedge}\;(S_m\,S_p\,S_q\,S_r).$$

Par les points S_m, $S_p\equiv\infty$, S_q, S_r on mène des parallèles à la droite q, elles déterminent sur la droite SS_r la ponctuelle $(K\,\infty\,S\,S_r)$ et on a

$$(M_1\,M\,Q_1\,R_1)\;\overline{\wedge}\;(K\,\infty\,S\,S_r)$$

donc les droites M_1K, $M\infty\equiv r$, Q_1S, MM_1, SS_r sont tangentes à une conique, R_1 étant le point de contact de MM_1. Le théorème de Brianchon appliqué au pentagone dont les côtés successifs sont M_1K, SS_r, SQ_1, r, MM_1 montre que

Si S *est un point quelconque du plan de la conique* Σ, Q, R

deux points arbitrairement choisis sur la tangente m, K *le point d'intersection de la droite* SS_r *avec la parallèle menée par le point* S_m *à la droite* q, *les points* (r, SQ_1) *et* (MK, SR_1) *sont alignés sur le centre de courbure* M_1.

En particulier si le point S est sur la tangente m, $S_m \equiv M$, et on a

Si S, Q, R *sont trois points quelconques de la tangente* m, *les points* (SQ_1 r) *et* (SR_1, q) *sont alignés sur le centre de courbure* M_1.

5. Le point S étant un point quelconque du plan de la conique Σ, on a

$$(M_1 M Q_1 R_1) \barwedge (M P Q R) \barwedge (S_{m_1} S_{p_1} S_{q_1} S_{r_1}).$$

Par les points $S_{m_1} \equiv \infty$, $S_{p_1} \equiv S_m$, S_{q_1}, S_{r_1} on mène des parallèles à q_1, elles déterminent sur la droite SS_{r_1} la ponctuelle $(\infty K' S S_{r_1})$ et on a

$$(M_1 M Q_1 R_1) \barwedge (\infty K' S S_{r_1})$$

donc les droites $M_1 \infty$, MK'_1, $Q_1 S$, MM_1, SS_{r_1} sont tangentes à une conique, R_1 étant le point de contact de MM_1. Le pentagone ($M_1 \infty$, $Q_1 S$, SS_{r_1}, MK', MM_1) donne

Si S *est un point quelconque du plan de la conique* Σ, Q, R *deux points arbitrairement choisis sur la tangente* m, K' *le point d'intersection de* SS_{r_1} *avec la parallèle menée par* S_m *à la droite* q_1, H' *l'intersection de* SQ_1 *avec la parallèle menée par le centre de courbure* M_1 *à la droite* r_1, *les droites* MH', M_1K', SR_1 *sont concourantes.*

En particulier: S est le centre de la conique Σ, $Q \equiv B$, $R \equiv A$ on a la propriété

Si S_m *est la projection du centre de la conique* Σ *sur la tangente* m, K' *celle de* S_m *sur l'axe* a_1, *la droite* MK' *rencontre l'axe* b_1 *en un point* H' *qui est la projection du centre de courbure* M_1 *sur l'axe* b_1.

6. On a

$$(M_1 M Q_1 R_1) \barwedge (M P Q R) \barwedge (m\, m_1\, q\, r).$$

On coupe le faisceau des polaires $(m\, m_1\, q\, r)$ par l'axe de symétrie a_1 suivant la ponctuelle $(A A_1 Q_a R_a)$; on projette orthogonalement cette ponctuelle sur la tangente m suivant la ponctuelle $(A M Q'_a R'_a)$; on a

$$(M_1 M Q_1 R_1) \barwedge (A M Q'_a R'_a)$$

donc les droites $Q_1 Q'_a$, $R_1 R'_a$, ... concourent en un point fixe de la droite $A M_1$. Ainsi

Si Q *est un point quelconque de la tangente* m, Q_a *la trace d'un axe de symétrie* a_1 *sur la polaire* q, Q'_a *la projection orthogonale de* Q_a *sur* m, *la droite* $Q_1 Q'_a$ *passe par un point fixe* G *de la droite joignant le point* A *au centre de courbure* M_1.

Cas particuliers. *a*) $Q \equiv B$. La parallèle menée par le point B_1 à la tangente *m* passe par G.

b) $Q \equiv D$. Le diamètre parallèle à la normale m_1 passe par G.

7. On a

$$(M_1 M Q_1 R_1) \;\overline{\wedge}\; (M P Q R) \;\overline{\wedge}\; (m_1 m q' r')$$

q', r' étant les perpendiculaires abaissées de M sur les polaires q, r. On coupe le faisceau $(m_1 m q' r')$ par l'axe de symétrie a_1 suivant la ponctuelle $(A_1 A Q''_a R''_a)$ que l'on projette orthogonalement sur m suivant la ponctuelle $(M A Q'''_a R'''_a)$: on a

$$(M_1 M Q_1 R_1) \;\overline{\wedge}\; (M A Q'''_a R'''_a) \;\overline{\wedge}\; (A M R'''_a Q'''_a)$$

donc les droites $A M_1$, $Q_1 R'''_a$, $R_1 Q'''_a$ sont concourantes.

Si Q, R *sont deux points quelconques de la tangente* m, Q''_a, R''_a *les traces d'un axe de symétrie* a_1 *sur les perpendiculaires abaissées de* M *sur les polaires* q *et* r: Q'''_a, R'''_a *les projections orthogonales de* Q''_a, R''_a *sur* m; *les droites* $Q_1 R'''_a$, $R_1 Q'''_a$ *se coupent sur la droite joignant le point* A *au centre de courbure* M_1

8. Les ponctuelles projectives

$$(M_1 M Q_1 \infty) \;\overline{\wedge}\; (S_m \infty S_q S_d)$$

sont involutions si $S_d \equiv M$, c'est-à-dire, si le point S est situé sur le diamètre OM. Par suite

Si S *est un point fixe arbitrairement choisi sur le diamètre* OM, Q *un point quelconque de la tangente* m, *les points* Q_1 *et* S_q *sont conjugués dans une involution fixe. Le point* M *est le point central de cette involution; le centre de courbure* M_1 *et le point* S_m *sont conjugués.*

Cas particulier. S est le centre de la conique Σ. On a l'involution $(M \infty, A_1 B_1, S_m M_1)$. Donc

$$M M_1 . M S_m = M A_1 . M B_1 . \text{ [1]}$$

---

[1] G. de Longchamps, Nouvelles Annales de Mathématiques, 1880, p. 69.

On en conclut aussi : *La perpendiculaire abaissée du point* S_m *sur le diamètre* $O M_1$ *rencontre la tangente* m *en un point dont la polaire est parallèle à* $O M_1$.

9. La projectivité

$$(M_1 M Q_1 \infty) \barwedge (S_m \infty S_q S_d)$$

est cyclique si en posant $S_d \equiv R_1$ on a $S_r \equiv M$. Donc

Si R *est un point de la tangente* m, S *le point d'intersection de la polaire de ce point avec la droite menée par* R_1 *parallèlement au diamètre* O M, *le point* S_m *est l'homologue du centre de courbure* M_1 *dans la projectivité cyclique définie par le terne* M, ∞, R_1.

10. La projectivité

$$(M_1 M Q_1 \infty) \barwedge (\infty S_m S_{q_1} S_{d_1})$$

est involutive si $S_{d_1} \equiv M_1$; donc S doit être choisi sur la perpendiculaire abaissée de M_1 sur le diamètre O M. Par suite

Si S *est un point fixe de la perpendiculaire menée par le centre de courbure* M_1 *au diamètre* O M, Q *un point mobile sur la tangente* m, *les couples* (Q_1, S_{q_1}) *sont en involution. Le centre de courbure* M_1 *est le point central de cette involution ;* M *et* S_m *sont deux points conjugués.*

11. La projectivité précédente est cyclique si en posant $S_{d_1} \equiv R_1$, on a $S_{r_1} \equiv M_1$. Donc

Si R *est un point quelconque de la tangente* m, S *le point d'intersection des perpendiculaires menées respectivement par le centre de courbure* M_1 *et le point* R_1 *à la polaire* r *et au diamètre* O M, *le point* S_m *est l'homologue de* M *dans la projectivité cyclique définie par le terne* M_1, ∞, R_1.

12. Le théorème de Desargues appliqué à la parabole (P) tangente aux droites m et m_1 respectivement aux points P et M_1 donne l'involution

$$O\ (M M,\ M_1 P,\ A B).$$

13. Le diamètre O X normal à O M passe par le point à l'infini X de la parabole (P). Le théorème de Desargues appliqué à la parabole (P) tangente à la droite m_1 et à la droite de l'infini respectivement aux points M_1 et X donne l'involution

$$O\ (M_1 X,\ D_1 D_1,\ A B)$$

D_1 étant le point à l'infini sur m_1.

§ II

1. Notations. On désigne par

M un point d'une courbe Δ située sur une quadrique Σ,
m la tangente en M à la courbe Δ,
s' la conjuguée de m relativement à Σ,
m_1 la normale en M à la surface Σ,
(Δ) la normalie ayant la courbe Δ comme directrice,
M_1 le point central de la génératrice m_1 sur la normalie (Δ),
Q un point quelconque de la tangente m,
π_q le plan polaire de Q relativement à Σ,
q_1 la perpendiculaire abaissée de Q sur le plan π_q,
Q_1 le point d'appui sur la normale m_1, de la plus courte distance des droites m_1 et q_1,
s une droite arbitrairement choisie dans l'espace, parallèle à s',
S_q la trace de m_1 sur le plan mené par cette droite s, parallèlement au plan π_q,
S_{q_1} la trace de m_1 sur le plan mené par s perpendiculairement au plan π_q;
A, B, C les traces de m sur les plans de symétrie de Σ,
D le point à l'infini de m,
P le pôle du plan $m_1 s'$.

2. Q, R, S *étant trois points quelconques de la tangente* m *au point* M *de la quadrique* Σ, s *la parallèle menée par* S *à la tangente* s' *conjuguée de* m, M_1 *le point central de la génératrice* m_1 *sur la normalie* (Δ) *on a*

$$MM_1 = S_{q_1} S_{r_1} \frac{MQ \cdot MR}{SM \cdot QR}.$$

Les droites $(q_1 r_1 s_1 \ldots\ldots p_1)$ correspondant aux points de la ponctuelle $(QRS \ldots\ldots P)$ sont des génératrices de même système d'un paraboloïde hyperbolique; le plan directeur correspondant est normal à la droite s'. Ce système est coupé par le plan $m_1 s'$ passant par un de ses rayons, (le rayon m_1) suivant la ponctuelle $(Q_2 R_2 S_2 \ldots\ldots P_2)$. Soit M_1 le point de cette ponctuelle situé sur m_1. La parallèle menée par le point Q_2 à la droite s' est la plus courte distance des droites m_1 et q_1; elle rencontre m_1 au point Q_1. Si le point Q tend vers M le point Q_1 tend vers M_1. Ce point M_1 est donc le point central de la génératrice m_1 sur le système reglé $(q_1 r_1 s_1 \ldots\ldots p_1)$. Le paraboloïde est de raccordement le long de m_1, avec la nor-

malie (Δ); donc M_1 est aussi le point central relatif à m_1 sur cette normalie. On a

$$(M P Q R S \ldots\ldots) \barwedge (M_1 P_2 Q_2 R_2 S_2 \ldots\ldots) \barwedge (M_1 M Q_1 R_1 S_1 \ldots\ldots)$$

$$(M P Q R S \ldots\ldots) \barwedge (\pi_m \pi_p \pi_q \pi_r \pi_s \ldots\ldots)$$

$$(\pi_m \pi_p \pi_q \pi_r \pi_s \ldots\ldots) \barwedge (S_{m_1} S_{p_1} S_{q_1} S_{r_1} S_{s_1} \ldots\ldots).$$

Or

$$S_{s_1} \equiv S_{1s_1}\,, \quad S_{p_1} \equiv M\,, \quad S_{m_1} \equiv \infty$$

on a donc les ponctuelles projectives

$$(M M_1 Q_1 R_1 S_1 \ldots\ldots) \barwedge (M \infty S_{q_1} S_{r_1} S_1 \ldots\ldots)$$

dont les éléments doubles sont M et S_1 par suite

$$(M S_1 Q_1 S_{q_1}) = (M S_1 M_1 \infty)$$

on en déduit

$$MM_1 = S_{q_1} S_1 \frac{M Q_1}{S_{q_1} Q_1} = S_{q_1} S_1 \frac{M Q}{S Q}\,.$$

Si $Q \equiv D$ on a

$$MM_1 = S_{d_1} S_1\,.\ (^1)$$

En procédant comme au numéro (2) du paragraphe I on a aussi

$$M M_1 = S_{q_1} S_{d_1} \frac{M Q}{S M}$$

$$M M_1 = S_{q_1} S_{r_1} \frac{M Q \,.\, M R}{S M \,.\, Q R}\,.$$

3. A étant la trace de m sur un plan de symétrie de Σ, a_1 la perpendiculaire abaissée de ce point sur son plan polaire, on désigne par α le plan mené par a_1 parallèlement à la tangente s'.

Par tout point S_{q_1} de m_1 on mène un plan parallèle à ce plan α; il coupe m en un point Q', on a si s coupe m

$$(M M_1 Q_1 \ldots\ldots) \barwedge (M \infty Q' \ldots\ldots)$$

---

(1) C. Servais, *Sur les quadriques homofocales* (Mathesis, VII, (3), p. 116).

ces ponctuelles sont perspectives, donc la droite $Q_1 Q'$ passe par un point fixe F. Ainsi

Si s *est une droite fixe parallèle à la tangente* s' *et rencontrant en* S *la tangente* m, Q *un point variable de* m, *les plans parallèles à* s' *menés par* s *et* Q, *normalement au plan polaire de* Q *rencontrent la normale* m_1 *en deux points* S_{q_1}, Q_1; *le plan mené par* S_{q_1} *parallèlement au plan* α *encontre la tangente* m *en un point* Q' *tel que la droite* $Q_1 Q'$ *passe par un point fixe* F. *La droite joignant ce point* F *au point central* M_1 *est perpendiculaire à la normale* m_1.

Cas particuliers. *a*) $Q \equiv A$. La droite $S A_1$ passe par le point F.

b) $Q \equiv S$. La droite $S_1 F$ est parallèle au plan α.

c) $Q \equiv D$. Le plan mené par S_{d_1} parallèlement au plan α coupe m en un point D' tel que D'F est parallèle à la normale m_1.

4. La droite s parallèle à s' étant quelconque dans l'espace on a

$$(M_1 M Q_1 R_1) \barwedge (M P Q R) \barwedge (S_m S_p S_q S_r).$$

Par les points S_m, $S_p \equiv \infty$, S_q, S_r on mène des plans parallèles au plan π_q; ils déterminent dans le plan sS_r le faisceau de rayons parallèles, k, ∞ , s, s_r et on a

$$(M_1 M Q_1 R_1) \barwedge (k \infty s s_r)$$

donc les plans $M_1 k$, $M \infty \equiv \pi_r$, $Q_1 s$, $R_1 s_r$, ss_r sont tangents à un cylindre; R_1 étant un point de contact du plan $R_1 s_r$. On en déduit

Si s *est une droite quelconque de l'espace, parallèle à la tangente* s', Q *et* R *deux points arbitrairement choisis sur la tangente* m, k *l'intersection du plan* $s S_r$ *avec le plan mené par* S_m *parallèlement au plan* π_q, *les droites* $(\pi_r, s Q_1)$ $(M k, s R_1)$ *sont dans un plan passant par le point central* M_1 *de la génératrice* m_1 *sur la normalie* (Δ).

En particulier si la droite s rencontre la tangente m, $S_m \equiv M$ et on a la propriété

Si s *est une droite parallèle à la tangente* s' *et rencontrant la tangente* m; Q *et* R *deux points arbitrairement choisis sur* m; *les droites* $(s Q_1, \pi_r)$, $(s R_1, \pi_q)$ *sont dans un plan passant par le point central* M_1.

5. La droite s parallèle à s' étant quelconque dans l'espace on a

$$(M_1 M Q_1 R_1) \barwedge (M P Q R) \barwedge (S_{m_1} S_{p_1} S_{q_1} R_{r_1})$$

Par les points $S_{m_1} \equiv \infty$, $S_{p_1} \equiv S_m$, S_{q_1}, S_{r_1} on mène des plans parallèles à s et à q_1, ils déterminent dans le plan sS_{r_1} le faisceau de rayons parallèles, ∞, k', s, s_{r_1} et on a

$$(M_1 \, M \, Q_1 \, R_1) \barwedge (\infty \, k' \, s \, s_{r_1})$$

donc les plans $M_1 \infty$, $Q_1 s$, $M k'$, $R_1 s_{r_1}$, $s s_r$ sont tangents à un cylindre, R_1 étant un point de contact du plan $R_1 s_{r_1}$: on en déduit

Si s *est une droite quelconque de l'espace parallèle à la tangente* s', Q *et* R *deux points arbitrairement choisis sur la tangente* m, k' *l'intersection du plan* sS_{r_1} *avec le plan mené par* S_m *parallèlement à* s *et à* q_1 ; h' *l'intersection du plan* sQ_1 *avec le plan mené par le point central* M_1 *parallèlement à* s *et à* r_1 ; *les plans* Mh', $M_1 k'$, sR_1 *appartiennent à un même faisceau.*

6. On a

$$(M_1 \, M \, Q_1 \, R_1) \barwedge (M \, P \, Q \, R) \barwedge (\pi_m \, \pi_p \, \pi_q \, \pi_r) .$$

On coupe le faisceau des plans polaires $(\pi_m \, \pi_p \, \pi_q \, \pi_r)$, suivant la ponctuelle $(M_a \, P_a \, Q_a \, R_a)$ par l'axe de symétrie a de la quadrique Σ. On projette cette ponctuelle sur la tangente m, parallèlement au plan normal $m_1 s'$ suivant la ponctuelle $(M'_a \, M_a \, Q'_a \, R'_a)$ on a

$$(M_1 \, M \, Q_1 \, R_1) \barwedge (M'_a \, M \, Q'_a \, R'_a)$$

donc les droites $Q_1 Q'_a$, $R_1 R'_a$, ... concourent en un point fixe de la droite $M_1 M'_a$. Ainsi

Si Q *est un point quelconque de la tangente* m, Q_a *la trace d'un axe de symétrie* a *de* Σ *sur le plan* π_q. Q'_a *la projection de* Q_a *sur* m, *faite parallèlement au plan normal* $m_1 s'$, *la droite* $Q_1 Q'_a$ *passe par un point fixe* G. *Le plan tangent en* M *coupe l'axe* a *au point* M_a. *Si* M'_a *est la projection de* M_a *sur* m, *faite parallèlement au plan* $m_1 s'$, *la droite* $M'_a G$ *passe par le point central* M_1.

Cas particuliers. *a*) $Q \equiv A$, on suppose A dans le plan de symétrie normal à l'axe a ; $Q_a \equiv \infty$, $Q'_a \equiv \infty$, et la parallèle menée par le point A_1 à la tangente m passe par le point G.

b) $Q \equiv D$. Le plan diamétral de Σ parallèle au plan $m_1 s'$ passe par G.

7. On a

$$(M_1 \, M \, Q_1 \, R_1) \barwedge (M \, P \, Q \, R) \barwedge (\pi'_m \, \pi'_p \, \pi'_q \, \pi'_r)$$

π'_b désignant le plan mené par s' perpendiculairement au plan

polaire de Q. On coupe le faisceau $(\pi'_m \pi'_p \pi'_q \pi'_r)$ par l'axe de symétrie a suivant la ponctuelle $(M''_a, P''_a, Q''_a, R''_a)$; on projette cette ponctuelle sur la tangente m parallèlement au plan $m_1 s'$ suivant la ponctuelle $(M'''_a, P'''_a, Q'''_a, R'''_a)$. En remarquant que $M'''_a \equiv M$, $P'''_a \equiv M'_a$ on a

$$(M_1 M Q_1 R_1) \barwedge (M M'_a Q'''_a R'''_a) \barwedge (M'_a M R'''_a Q'''_a)$$

donc les droites $M_1 M'_a$, $Q_1 R'''_a$, $R_1 Q'''_a$ sont concourantes.

Si Q *et* R *sont deux points arbitrairement choisis sur la tangente* m, Q''_a, R''_a *les traces d'un axe de symétrie* a *sur les plans menés par* s' *normalement aux plans polaires de* Q *et* R; $Q'''_a R'''_a$ *les projections de* Q''_a *et* R''_a *sur* m, *faites parallèlement au plan* $m_1 s'$; *les droites* $Q_1 R'''_a$ *et* $R_1 Q'''_a$ *se coupent sur la droite joignant le point* M'_a *au point central* M_1.

8. Les ponctuelles projectives

$$(M_1 M Q_1 \infty) \barwedge (S_m \infty S_q S_d)$$

sont involutives si $S_d \equiv M$ c'est à dire si la droite s rencontre le diamètre O M de la quadrique Σ. Par suite

Si s *est une droite fixe arbitrairement choisie, parallèle à la tangente* s' *et coupant le diamère* OM *de la quadrique* Σ; Q *un point quelconque de la tangente* m, *les points* Q_1 *et* S_q *sont conjugués dans une involution fixe. Le point* M *est le point central de cette involution ; le point central* M_1 *de la génératrice* m_1 *et de le point* S_m *sont deux points conjugués.*

Cas particulier. La droite s passe par le centre O de la quadrique Σ. Les plans diamétraux conjugués aux diamètres OA, OB, OC rencontrent la normale m_1 aux points A', B', C' on a l'involution

$$(A_1 A',\ B_1 B',\ C_1 C',\ M \infty,\ M_1 S_m).$$

9. La projectivité

$$(M_1 M Q \infty) \barwedge (S_m \infty S_q S_d)$$

est cyclique si en posant $S_d \equiv R_1$, on a $S_r \equiv M$. Donc

Si R *est un point quelconque de la tangente* m, s *l'intersection du plan polaire de ce point avec le plan mené par* R_1 *parallèlement au plan diamétral conjugué de* m, *le point* S_m *est l'homologue du point central* M_1 *dans la projectivité cyclique définie par le terne* M, ∞, R_1.

10. La projectivité

$$(M_1\, M\, Q_1\, \infty) \barwedge (\infty\, S_m\, S_{q_1}\, S_{d_1})$$

est involutive si $S_{d_1} \equiv M_1$: donc s doit rencontrer la perpendiculaire abaissée de M_1 sur le plan diamétral conjugué de m. Par suite

Si s *est une droite fixe arbitrairement choisie, parallèle à la tangente* s' *et coupant la perpendiculaire menée par le point central* M_1 *au plan diamétral conjugué de* m, Q *un point mobile sur* m, *les couples* (S_{q_1}, Q_1) *sont en involution, Le point central* M_1 *de la génératrice* m_1 *est le point central de cette involution,* M *et* S_m *sont deux points conjugués.*

11. La projectivité précédente est cyclique, si en posant $S_{d_1} \equiv R_1$ on a $S_{r_1} \equiv M_1$. Donc

Si R *est un point quelconque de la tangente* m, s *l'intersection des plans menés par les points* M_1 *et* R_1, *perpendiculaires respectivement au plan polaire de* R *et au plan diamétral conjugué de* m; *le point* S_m *est l'homologue de* M *dans la projectivité cyclique définie par le terne* M_1, ∞, R_1.

12. Soit P_2 le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur la tangente s'; les plans de symétrie α, β de la quadrique Σ sont tangents au paraboloïde hyperbolique $(q_1\, r_1\, s_1 \ldots\ldots)$ (2) circonscrit au quadrilatère gauche $M\, M_1\, P_2\, P$; donc les plans α, β sont conjugués dans l'involution $\alpha\beta$ $(M\, P_2,\ M_1\, P)$. Ainsi

Les plans de symétrie α, β *de la quadrique* Σ, *et les plans projetant de l'axe de symétrie* $\alpha\beta$, *le point* M *et la projection* P_2 *du point* P *sur la tangente* s' *définissent une involution, dans laquelle le plan passant par le point* P *a pour conjugué le plan contenant le point central* M_1.

On mène par le centre O de la quadrique Σ la droite s parallèle à la tangente s'. Cette droite s est l'axe d'une involution de plans diamétraux conjugués; le couple rectangulaire de cette involution rencontre la tangente m aux points E et F. La droite s étant le diamètre conjugué du plan diamétral Om, les diamètres OE et OF sont respectivement conjugués aux plans sF et sE, par suite le plan sE est le plan mené par E parallèlement à la tangente s' et normalement au plan polaire de E; donc les plans sE et sF coupent la normale m_1 aux points E_1 et F_1 (I, II). On a

$$(M\, P\, E\, F) \barwedge (M_1\, M\, E_1\, F_1)$$

$$(M\, P\, E\, F) \barwedge s\,(M\, P\, E\, F) \barwedge (M\, P''\, E_1\, F_1)$$

P'' étant la trace de la normale m_1 sur le plan sP, donc

$$(M P'' E_1 F_1) \barwedge (M_1 M E_1 F_1)$$

et les couples MM, $M_1 P''$, $E_1 F_1$ sont en involution. Ainsi

Soit s *le diamètre conjugué du plan diamétral* Om; *les plans conjugués normaux passant par* s *et le plan* sP *déterminent sur la normale* m_1 *les points* E_1, F_1, P''. *Dans l'involution* $(MM, E_1 F_1)$ *le point* P'' *est le conjugué du point central* M_1 *relatif à la génératrice* m_1 *de la normalie* (Δ).

Remarque. Les plans sE et sF sont conjugués dans l'involution $s(MP_2\, M_1 P)$; car ils sont tangents au paraboloïde $(q_1 r_1 s_1 \ldots)$

13. Le diamètre normal au plan diamétral Os' passe par le point de contact X du plan de l'infini et du paraboloïde hyperbolique $(q_1 r_1 s_1 \ldots .)$ (*Mathesis*, 1907, p. 117). Si l'on désigne par Y et Z les points à l'infini de MM_1 et $M_1 P_2$, le paraboloïde $(q_1 r_1 s_1 \ldots .)$ est circonscrit au quadrilatère gauche $M_1 YXZ$; donc :

Les plans de symétrie α, β *sont conjugués dans l'involution* $\alpha\beta(M_1 X, YZ)$.

Les plans sE, sF *sont conjugués dans l'involution* $s(M_1 X, YZ)$.

SUR LES ÉQUATIONS A RACINES RÉELLES

PAR

M.[lle] V. Gradara

à Rome

Il est bien connu que, si l'équation

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

a toutes ses racines réelles (simples ou multiples), l'équation

$$\lambda f(x) - f'(x) = 0\,, \tag{2}$$

dans laquelle λ est un paramètre réel, jouit de la même propriété (¹). Nous allons en donner ci-dessous une démonstration, qui nous parait plus simple que les autres, sans être moins précise.

En effet, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de l'équation donnée, on a

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)\,,$$

et par conséquent

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x - \alpha_n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_\nu}\,. \tag{3}$$

Supposons que l'une des racines de (2) soit complexe, et dé-

(¹) V. p. ex. Cesaro, *Analisi algebrica*, p. 400. De cette propriété on déduit très aisément des propriétés plus générales bien importantes.

signons-la par $p+iq$; en la plaçant au lieu de x dans l'équation (3), on a

$$\frac{f'(p+iq)}{f(p+iq)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{p+iq-\alpha_\nu}.$$

Mais, puisque $p+iq$ est une racine de l'équation (2), on aura

$$\lambda = \frac{f'(p+iq)}{f(p+iq)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{p+iq-\alpha_\nu}. \tag{4}$$

On aura de même pour la racine conjuguée $p-iq$

$$\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{p-iq-\alpha_\nu}. \tag{5}$$

Retranchant l'équation (5) de l'équation (4), on obtient

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{p+iq-\alpha_\nu} - \frac{1}{p-iq-\alpha_\nu} \right),$$

c'est-à-dire

$$0 = -2iq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(p-\alpha_\nu)^2+q^2}$$

ou bien

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(p-\alpha_\nu)^2+q^2},$$

ce qui est absurde, car tous les termes de la somme sont positifs.

Comme on le voit, l'hypothèse que nous avions faite conduit à un résultat absurde; par conséquent l'équation (2) ne saurait pas admettre des racines complexes.

ESSAI D'UNE THÉORIE ANALYTIQUE DES LIGNES NON-EUCLIDIENNES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI
à Rome

(Suite)

CHAPITRE III

§ 32

Généralités. — A chaque point d'une ligne gauche non-euclidienne, conformément à ce que l'on fait dans l'espace ordinaire, on peut considérer: Les *trois directions principales* (tangente, normale principale, binormale), les *trois plans principaux* (plan osculateur, normal, rectifiant), les *trois développables anexées à la courbe* (développable osculatrice, polaire, rectifiante), les *droites rectifiantes* (génératrices de la développable rectifiante), le *cercle osculateur,* la *sphère osculatrice,* le *centre de courbure,* le *centre de la sphère osculatrice.*

Ces éléments géométriques d'une ligne non-euclidienne ont des définitions, des propriétés et des relations mutuelles comme dans l'espace ordinaire.

§ 33

Arc élémentaire. — A (ξ, η, ζ) et B $(\xi+d\xi, \eta+d\eta, \zeta+d\zeta)$ étant deux points consécutifs d'une ligne L, l'arc élémentaire $AB=ds$ peut être calculé à l'aide des formules (16), (16′) du § 6, quand on y remplace $\sin(ds)$ par ds, ce qui revient à négliger des infiniment petits d'ordre supérieur.

En rappelant en outre la remarque que l'on vient de faire au

§ 23 (Ière Partie), on trouve les formules

$$(1)\quad \begin{cases} ds = \dfrac{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2+(\eta d\xi-\xi d\eta)^2+(\zeta d\eta-\eta d\xi)^2+(\xi d\zeta-\zeta d\xi)^2}}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \\ \quad = \dfrac{\sqrt{(1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)-(\xi d\xi+\eta d\eta+\zeta d\zeta)^2}}{1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \end{cases}$$

$$(1')\quad \begin{cases} ds = \dfrac{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2-(\eta d\xi-\xi d\eta)^2-(\zeta d\eta-\eta d\zeta)^2-(\xi d\zeta-\zeta d\xi)^2}}{1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2} \\ \quad = \dfrac{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2)(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)+(\xi d\xi+\eta d\eta+\zeta d\zeta)^2}}{1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2} \end{cases}$$

valant respectivement pour les lignes riemanniennes et lobatschewskiennes.

Coordonnées géographiques. — Si (u, v, w) sont les coordonnées géographiques d'un point quelconque de la ligne L, et $ds_0 = A_0B_0$ est la projection orthogonale de ds sur le plan coordonné $z = 0$, on a la relation (§ 23 — I)

$$ds_0{}^2 = \cos^2 v \,.\, du^2 + dv^2 \,.$$

D'ailleurs du quadrilatère hyperconique infiniment petit ABA_0B_0, que l'ont peut considérer comme une figure plane, on dérive l'autre relation

$$ds^2 = \overline{AB}^2 = \cos^2 w \,.\, ds_0{}^2 + dw^2 \,.$$

Si donc on élimine d'ici ds_0, en faisant en outre un calcul analogue dans l'espace lobatschewskien, on trouve les autres formules

$$(2)\qquad ds = \sqrt{\cos^2 v \cos^2 w \,.\, du^2 + \cos^2 w \,.\, dv^2 + dw^2}$$

$$(2')\qquad ds = \sqrt{\operatorname{ch}^2 v \operatorname{ch}^2 w \,.\, du^2 + \operatorname{ch}^2 w \,.\, dv^2 + dw^2} \,.$$

Coordonnées polaires. — Si dans les équations (1), (1′) on remplace ξ, η, ζ par leurs expressions (1), (1′) du § 2, on trouve après quelques calculs

$$(3)\qquad ds = \sqrt{dR^2 + \sin^2 R \,.\, (d\theta^2 + \sin^2\theta \,.\, d\omega^2)}$$

$$(3')\qquad ds = \sqrt{dR^2 + \operatorname{sh}^2 R \,.\, (d\theta^2 + \sin^2\theta \,.\, d\omega^2)} \,.$$

Remarque. — Pour $\zeta = 0$, $w = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ les (1), (2), (3) reviennent aux formules correspondantes du plan.

§ 34

Aire d'une surface courbe. — Pour évaluer l'aire d'une surface courbe, on la partage d'ordinaire en un nombre tellement grand de parties, que chacune de celles-ci puisse être regardée, à cause de sa petitesse, comme une surface euclidienne.

En adoptant les coordonnées géographiques (u, v), on sait (§ 26 — I) que l'aire élémentaire plane comprise entre l'axe Ox, deux ordonnées consécutives v, $v + dv$ et l'arc infiniment petit ds d'une ligne plane quelconque, a pour valeur $\sin v \,.\, du$. La différentielle

$$\cos v \,.\, dvdu$$

de cette formule exprime évidemment l'aire $d\Sigma$ du quadrilatère infiniment petit compris entre les ordonnées v, $v + dv$ correspondant aux valeurs u, $u + du$ de la première coordonnée géographique u, et les hypercycles d'axe Ox et d'hauteurs v et $v + dv$.

Il s'ensuit que l'aire plane finie Σ peut être calculée à l'aide de l'intégrale double

$$\Sigma = \int\int \cos v \,.\, dvdu \,,$$

étendue entre des limites convenables.

S'il s'agit maintenant de l'aire S d'une surface courbe quelconque, on partage d'abord le plan xy en une infinité de quadrilatères infiniment petits $d\Sigma$, et tout le long des lignes de division on élève les ordonnées perpendiculaires au plan, en les prolongeant jusqu'à leur rencontre avec la surface courbe. Celle-ci reste ainsi partagée en une infinité de quadrilatères curvilignes infiniment petits, que l'on peut regarder décrits sur des hypersphères ayant pour base commune le plan xy et pour hauteur la troisième coordonnée géographique w des points de la surface. Si donc l'espace est riemannien, on a (§ 14):

$$dS = \cos^2 w \,.\, d\Sigma = \cos^2 w \cos v \,.\, dv\, du \,,$$

d'où il suit par intégration

$$S = \int\int \cos^2 w \cos v \,.\, dvdu \,. \tag{4}$$

En introduisant ici les coordonnées ξ, η, ζ à l'aide des relations du § 3, on obtient l'autre expression

$$(5) \qquad S = \iint \frac{(1+\xi)^2 \, d\xi \, d\eta - \xi\eta \, . \, d\xi^2}{(1+\xi^2)(1+\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$$

Ces formules et les autres

$$(4') \qquad S = \iint \mathrm{ch}^2 w \, \mathrm{ch}\, v \, . \, dv du$$

$$(5') \qquad S = \iint \frac{(1+\xi^2)\, d\xi \, d\eta + \xi\eta \, . \, d\xi^2}{(1+\xi^2)(1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2)\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}$$

de l'espace lobatschewskien, quand les intégrales doubles soient étendues entre des limites convenables, servent à évaluer l'aire d'une surface non-euclidienne quelconque.

§ 35

Aire d'une tranche de canal. — Le quadrilatère infiniment petit $ABA'B'$ compris entre deux hypercycles-générateurs consécutifs (g, g') et deux sections droites consécutives (m, n), peut être regardé comme un rectangle euclidien ; de sorte que

Fig. 9

$$(6) \qquad \text{Aire } ABA'B' = dS = AA' \, . \, AB$$

Or si la section droite du canal est définie par l'équation

$$(7) \qquad \rho = \lambda(\sigma) = f(\omega) ,$$

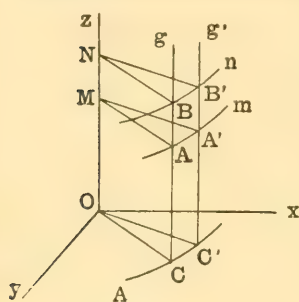
en coordonnées radiales (ρ, σ) ou polaires (ρ, ω), on a

$$AA' = d\sigma = \sqrt{f'^2(\omega) + \sin^2 f(\omega)} \, . \, d\omega \, .$$

D'ailleurs (§ 24 — I)

$$AB = \cos \lambda(\sigma) \, . \, dz = \cos f(\omega) \, . \, dz \, ,$$

de sorte que l'équation (6), après une intégration, donne

$$(8) \qquad S = z \int \cos \lambda(\sigma) \, . \, d\sigma = z \int \sqrt{f'^2(\omega) + \sin^2 f(\omega)} \, . \cos f(\omega) \, d\omega \, .$$

Cette formule et l'autre analogue

$$(8') \qquad S = z \int \operatorname{ch} \lambda(\sigma) \, . \, d\sigma = z \int \sqrt{f'^2(\omega) + \operatorname{sh}^2 f(\omega)} \, . \operatorname{ch} f(\omega) \, d\omega$$

de l'espace lobatschewskien (quand on étende les intégrales doubles entre des limites convenables) donnent l'aire cherchée.

Dans le cas particulier du canal circulaire de rayon r, on a

$$\rho = f(\omega) = r ,$$

et les équations (8), (8') (les intégrales ci-dessus devant être limitées entre 0 et 2π) donnent

$$(9) \qquad S = 2\pi z \, . \sin r \cos r \qquad \text{(dans l'espace r.)}$$

$$(9') \qquad S = 2\pi z \, . \operatorname{sh} r \operatorname{sh} r \qquad \text{(dans l'espace l.).}$$

Or si l'on remarque que

$$\text{Périmètre base} = \begin{cases} 2\pi \, . \sin r \\ 2\pi \, . \operatorname{sh} r \end{cases} \qquad \text{Hypercycle-générateur} = \begin{cases} z \, . \cos r \\ z \, . \operatorname{ch} r , \end{cases}$$

on a dans tout cas

$$S = \text{Périmètre base} \times \text{Hypercycle-générateur} ,$$

conformément à ce qu'il a lieu dans le cylindre ordinaire.

§ 36

Aire d'une surface de révolution. — Soient $OM = u$, $AM = v$ les coordonnées géographiques d'un point quelconque A du méridien L, que l'on suppose tracé sur le plan xz.

Si l'on construit une suite de méridiens infiniment rapprochés, ceux-ci partagent la zône élémentaire dS comprise entre les parallèles consécutifs de rayons AM et BN, en une infinité de rectangles ayant pour hautuer commune l'arc élémentaire ds du méridien, et pour bases les parties successives dans lesquelles est partagé le parallèle AM. Ces quadrilatères curvilignes peuvent être consi-

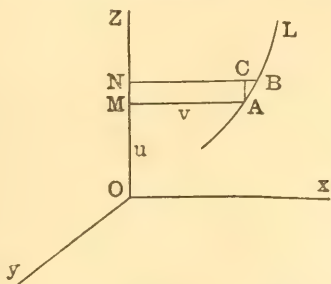



Fig. 10

dérés comme des rectangles euclidiens ; de sorte que si l'on définit le méridien L par une équation de la forme (§ 58 — I)

$$(10) \qquad v = \lambda(s),$$

on a pour l'aire dS

$$dS = 2\pi \sin v \,.\, ds = 2\pi \sin[\lambda(s)] \,.\, ds,$$

d'où il suit par intégration

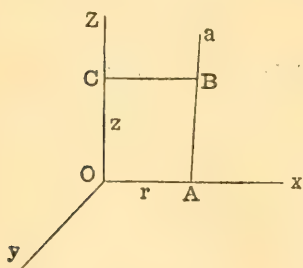
$$(11) \qquad S = 2\pi \int_{v_1}^{v_2} \sin v \,.\, ds = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} \sin[\lambda(s)] \,.\, ds.$$

Dans l'espace lobatschewskien on a la formule analogue

$$(11') \qquad S = 2\pi \int_{v_1}^{v_2} \operatorname{sh} v \,.\, ds = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} \operatorname{sh}[\lambda(s)]\, ds.$$

Telle est l'expression de l'aire de la zône comprise entre les parallèles de rayons v_1, v_2, décrits par les points du méridien correspondant aux valeurs s_1 et s_2 de l'arc.

§ 37

Aire d'une tranche d'hypercône de révolution. — Soit a une droite du plan xz (méridien de la surface) perpendiculaire en A à l'axe Ox, et $BC \equiv v$ la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque B du méridien sur l'axe Oz. En posant

$$OA = r, \quad OC = z,$$

on obtient du quadrilatère trirectangle COAB

$$(12) \qquad \operatorname{th} v = \operatorname{th} r \,.\, \operatorname{ch} z.$$

Fig. 11

On a donc pour expression de l'arc élémentaire ds du méridien :

$$ds = \sqrt{dv^2 + \operatorname{ch}^2 v \,.\, dz^2} = \frac{dz}{\operatorname{ch} r\,(1 - \operatorname{th}^2 r \,.\, \operatorname{ch}^2 z)},$$

et pour valeur de l'aire dS de la zône élémentaire comprise entre deux parallèles infiniment rapprochés:

$$dS = 2\pi \operatorname{sh} v \,.\, ds = 2\pi \frac{\operatorname{th} r}{\operatorname{ch} r} \,.\, \frac{\operatorname{ch} z \,.\, dz}{(\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 r \,.\, \operatorname{ch}^2 z})^3} \,.$$

Intégrons cette équation, en comptant l'aire S à partir du parallèle $z = 0$ (*section droite principale*); on obtient alors pour expression de l'aire cherchée

$$(13) \qquad S = 2\pi \,.\, \frac{\operatorname{sh} r \,.\, \operatorname{sh} z}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 r \,.\, \operatorname{ch}^2 z}} \,.$$

Et si l'on élimine r entre les équations (12), (13), on trouve l'autre formule:

$$(14) \qquad S = 2\pi \,.\, \frac{\operatorname{sh} v \,.\, \operatorname{sh} z}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{th}^2 v}} \,.$$

Les équations (13), (14) expriment l'aire d'une tranche d'hypercône en fonction de l'hauteur z et du rayon r de la section droite principale, ou du rayon v de la section droite terminale.

En désignant par p et P les périmètres des sections droites (principale et terminale) de l'hypercône, on a

$$(15) \qquad p = 2\pi \,.\, \operatorname{sh} r \,, \quad P = 2\pi \,.\, \operatorname{sh} v \,;$$

de sorte que si l'on élimine r, v, z entre les équations (12), (14), (15), on arrive à cet intéressant résultat: *L'aire de la tranche d'hypercône s'exprime en fonction des périmètres* P, p *par la relation*

$$(16) \qquad S = \sqrt{P^2 - p^2} \,.$$

En considérant la formule (16), il peut sembler étrange z au premier abord que l'aire S soit indépendante de l'hauteur z de l'hypercône. Mais une telle indépendance est tout-à-faite illusoire, car les périmètres P, p sont liés à l'hauteur z, ainsi que le démontre la relation (12) entre les rayons r, v et z; de sorte que S est au fond une fonction de l'hauteur z.

L'équation (12) fait voir que: *La condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles de rayons* r, v *décrits sur des plans perpendiculaires à la droite joignant leurs centres, soient deux parallèles d'un hypercône de révolution, dont les génératrices sont perpendiculaires au plan du premier cercle, est que la distance* z *de*

leurs centres soit donnée par la relation

(17) $$\operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{th} v}{\operatorname{th} r}.$$

§ 38

Aire d'une tranche d'oricône de révolution. — Nous faisons usage ici de la figure du § 37, en y supposant cependant que la droite a soit parallèle à l'axe Oz.

Or comme cette droite est définie, en coordonnées geographiques $Oc = z$, $CB = v$ par l'équation (§ 12 — I)

(18) $$\operatorname{th} v = \operatorname{th} r (\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z) = \frac{\operatorname{th} r}{\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z},$$

on obtient pour expression de l'arc élémentaire du méridien a

$$ds = \sqrt{dv^2 + \operatorname{ch}^2 v \, . \, dz^2} = \frac{(\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z)^2}{(\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z)^2 - \operatorname{th}^2 r} \, . \, dz ,$$

et pour expression de l'aire de la zône élémentaire de la surface

$$dS = 2\pi \operatorname{sh} v \, . \, ds = 2\pi \operatorname{th} r \, . \, \frac{(\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z)^2}{\left[(\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z)^2 - \operatorname{th}^2 r\right]^{\frac{3}{2}}} \, . \, dz .$$

D'ici par intégration, en rappelant au surplus la relation (18):

(19) $$S = -2\pi \frac{\operatorname{th} r}{\sqrt{(\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z)^2 - \operatorname{th}^2 r}} + c = -2\pi \operatorname{sh} v + c ,$$

c étant une constante arbitraire.

Mais si l'on compte l'aire S à partir du paralléle $z = 0$, on reconnait des égalités (19) que l'on doit prendre $c = 2\pi \, . \operatorname{sh} r$; de sorte que ces équations reviennent aux autres

(20) $$S = 2\pi \left[\operatorname{sh} r - \frac{\operatorname{th} r}{\sqrt{(\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z)^2 - \operatorname{th}^2 r}} \right] = 2\pi (\operatorname{sh} r - \operatorname{sh} v) .$$

Ces deux formules donnent l'aire d'une tranche d'oricône, en fonction de l'hauteur z et du rayon r (ou v) du parallèle initial (ou terminal).

En introduisant ici les périmètres (15) des parallèles extrèmes,

la deuxième formule (20) revient à l'autre

$$(21) \qquad S = p - P,$$

remarquable pour sa simplicité.

La longueur du segment AB de la droite a a pour expression (§ 24 — I)

$$AB = \log\left(\frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{sh} v}\right) = \log(\operatorname{ch} r \sqrt{e^{2z} - \operatorname{th}^2 r}).$$

Or comme l'on dérive d'ici la formule

$$(22) \qquad e^z = \frac{\operatorname{th} r}{\operatorname{th} v},$$

on voit en premier lieu que l'indépendance de l'équation (21) de l'hauteur z de la tranche est illusoire.

§ 39

Aire de la sphère. — Comme le cercle riemannien de rayon r est représenté (en coordonnées v, s) par l'équation

$$(23) \qquad \sin v = \sin r \,.\, \sin\left(\frac{s}{\sin r}\right),$$

on obtient par l'application de la relation (11):

$$(24) \qquad S = 2\pi \sin r \int_{s_1}^{s_2} \sin\left(\frac{s}{\sin r}\right) ds = -2\pi \sin^2 r \left[\cos\left(\frac{s}{\sin r}\right)\right]_{s_1}^{s_2}.$$

Telle est l'expression de l'aire d'une zône sphérique.

Pour avoir l'aire de la demi-sphère, il suffit évidemment d'étendre l'intégrale entre les limites $s_1 = 0$ et $s_2 = \frac{\pi}{2} \,.\, \sin r$, correspondant aux valeurs $v_1 = 0$, $v_2 = r$ de la variable v. On arrive ainsi à ce résultat: *L'aire de la sphère riemannienne de rayon* r *est* $4\pi \sin^2 r$.

En suivant un procédé analogue, on trouve pour aire de la sphère lobatschewskienne $4\pi \operatorname{sh}^2 r$.

Si l'on rappelle les équations (20), (20') du § 28 (I[ère] Partie), les formules que l'on vient de trouver démontrent ces deux

propriétés: 1.° *L'aire d'une sphère quelconque, euclidienne ou non, est égale à l'aire du cercle de rayon double.*

2.° *Les aires de deux sphères quelconques, euclidiennes ou non, sont proportionnelles aux carrés des longueurs de leurs grands-cercles.*

§ 40

Volume d'un solide. — La comparaison *directe* entre deux solides est possible seulement s'ils appartiennent à même espace, et dans ce cas l'unité la plus convenable est peut-être le corps prismatique ou cylindrique compris entre une figure plane fermée ayant une unité d'aire, et l'hypersphère ayant pour hauteur l'unité de longueur *(unité naturelle)*. Mais si l'on conçoit le corps à mésurer comme l'ensemble d'une infinité de parties infiniment petites, chacune de ces parties pouvant être regardée comme un corp euclidien, a un volume exprimable en *unités cubiques* suivant le procédé de la géométrie ordinaire. La somme de tous ces volumes euclidiens infiniment petits et en nombre infini (représentée naturellement par une intégrale définie) exprime le volume du solide non-euclidien considéré.

Pour plus de simplicité on appliquera dans la suite cette méthode, d'autant plus qu'une fois que l'on voulût éxprimer le volume en unités naturelles, il serait suffisant de multiplier le volume calculé par un convenable facteur constant.

Ces considérations n'ont rien d'étrange, et dans l'espace ordinaire même on fait quelque chose de semblable lorsque, ne pouvant pas établir une comparaison *directe* entre un solide limité par une ou plusieurs surfaces courbes et le cube unitaire, on décompose le solide en un nombre tellement grand de parties, qu'on puisse les regarder comme des polyèdres (ordinairement des parallélepipèdes); et après avoir évalué le volume de chacune de ces parties, on en fait la somme (exprimable naturellement par une intégrale définie).

§ 41

Soit S_1 une hypersphère d'hauteur Δ, ayant pour base le plan coordonné $xy \equiv S$.

A une aire unitaire U décrite sur ce plan, correspond sur l'hypersphère S_1 l'aire $\cos^2 \Delta$ ou $\mathrm{ch}^2 \Delta$, suivant la nature de l'espace (§ 14). Or, si dans l'hypothèse de l'espace riemannien on construit une autre hypersphère de base S, infiniment rapprochée de l'autre, on obtient une sorte de disque infiniment mince ayant le volume $\cos^2 \Delta \, . \, d\Delta$.

Il s'ensuit que le volume du corps (prismatique ou cylindrique), compris entre l'aire unitaire U du plan S, l'aire correspondante de l'hypersphère S_1 et l'hypercône ayant pour section droite principale le contour de U, est exprimé par la formule

$$\int \cos^2 \Delta \, . \, d\Delta = \frac{\sin \Delta \cos \Delta + \Delta}{2}.$$

Cela posé, considérons le solide compris entre une surface arbitraire, le plan coordonné xy, et l'hypercône lieu des normales élevées à ce plan le long d'un contour quelconque. Si l'on partage le plan xy en un infinité de parties élémentaires $d\Sigma$, et que l'on fasse usage des coordonnées géographiques de l'espace (u, v, w), il résulte (§ 26 — I)

$$d\Sigma = \cos v \, . \, dv \, du \, .$$

Le prisme (ou cylindre) de base $d\Sigma$ et limité par la surface donnée a donc un volume exprimable par la relation

$$dV = (w + \sin w \cos w) \frac{d\Sigma}{2} = \frac{1}{2} (w + \sin w \cos w) \cos v \, . \, dv \, du \, ,$$

d'où il suit par intégration

$$V = \frac{1}{2} \int\int (w + \sin w \cos w) \cos v \, . \, dv \, du \, . \tag{25}$$

A l'aide de cette formule (en étendant l'intégrale double entre des limites convenables) on peut évaluer le volume des solides riemanniens.

Dans l'espace lobatschewskien la formule (25) est remplacée par l'autre analogue

$$V = \frac{1}{2} \int\int (w + \text{sh}\, w \, \text{ch}\, w) \, \text{ch}\, v \, . \, dv \, du \, . \tag{25'}$$

§ 42

Cas particuliers. — 1.° En supposant w = constante = m, l'équation (25) revient à l'autre

$$V = \frac{1}{2} (m + \sin m \, . \, \cos m) \int\int \cos v \, . \, dv \, du \, .$$

Mais si dans la courbe C du plan $z=0$ (base du solide) les variables u, v varient respectivement dans les intervalles de u_1 à u_2 et de v_1 à v_2, on a

$$\iint \cos v\,.\,dv\,du = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_2}^{v_2} \cos v\,dv = (u_2 - u_1)(\sin v_2 - \sin v_1)\,,$$

et conséquemment

$$V = \frac{1}{2}(m + \sin m \cos m)(u_2 - u_1)(\sin v_2 - \sin v_1)\,.$$

Tel est le volume du cylindre hyperconique riemannien d'hauteur m, ayant pour base inférieure une courbe fermée C du plan $z=0$ (définie par une relation connue entre u et v) et pour base supérieure la courbe correspondante de l'hypersphère $w=m$.

2.° Considérons maintenant un hypercône riemannien arbitraire, d'hauteur m (§ 14).

Comme la base supérieure est sur le plan $z=m$, les relations (9) du § 3 donnent

$$\operatorname{tg} m = \frac{\operatorname{tg} w}{\cos u \cos v}\,,$$

d'où il suit

$$w = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} m\,.\,\cos u \cos v)\,.$$

On obtient d'ici

$$\sin w \cos w = \frac{\operatorname{tg} m\,.\,\cos u \cos v}{1 + \operatorname{tg}^2 m\,.\,\cos^2 u \cos^2 v}\,,$$

et la formule (25) revient à l'autre

$$V = \frac{1}{2}\iint\left[\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} m.\cos u \cos v) + \frac{\operatorname{tg} m.\cos u \cos v}{1+\operatorname{tg}^2 m.\cos^2 u \cos^2 v}\right]\cos v.du\,dv.$$

Il ne reste ici qu'à étendre l'intégrale double entre des limites convenables, pour avoir le volume de la tranche d'hypercône.

§ 43

Volume d'un solide de révolution. — Soit

$$\zeta_0 = F(\zeta_0) \qquad (26)$$

l'équation du méridien de la surface contenu sur le plan xz, et BB' le parallèle suivant lequel la surface est coupée par une hypersphère d'hauteur z ayant pour base le plan $z=0$. Nous nous proposons en premier lieu de *déterminer l'aire de la portion de l'hypersphère ayant pour borne le parallèle* BB'.

Fig. 12

Remarquons d'abord que l'hypersphère est coupée par le plan xz suivant l'hypercycle BMB' d'équation (§ 14 — I)

$$(27) \qquad \zeta_0^2 - \text{tg}^2 z \,.\, \xi_0^2 - \text{tg}^2 z = 0\,.$$

En éliminant d'ici ξ_0 à l'aide de la relation (26), on obtient l'équation

$$(28) \qquad \zeta_0^2 - \text{tg}^2 z \,.\, F^2(\zeta_0) - \text{tg}^2 z = 0\,,$$

que l'on suppose de pouvoir résoudre par rapport à ζ_0, en trouvant ainsi une relation de la forme

$$(29) \qquad \zeta_0 = \lambda(z)\,,$$

où λ est un symbole fonctionnel connu. — Cette équation et l'autre

$$(30) \qquad \xi_0 = F[\lambda(z)]$$

que l'on obtient en éliminant ζ_0 entre (26) et (29), expriment évidemment les coordonnées du point B du méridien.

On a donc pour définir le rayon vecteur $OB = R$ la formule

$$\text{tg}\, R = \sqrt{\xi_0^2 + \zeta_0^2} = \sqrt{\lambda^2 + F^2(\lambda)}\,.$$

Or si l'on abaisse du point B la perpendiculaire BD sur l'axe Ox, le triangle rectangle ODB, dans lequel $BD = OM = z$, donne la relation

$$\cos OD = \frac{\cos R}{\cos z} = \frac{1}{\cos z \sqrt{1 + \lambda^2 + F^2(\lambda)}}\,.$$

On a donc

$$\text{Aire cercle}\,(OD) = 2\pi(1 - \cos OD) = 2\pi\left[1 - \frac{1}{\cos z \sqrt{1 + \lambda^2 + F^2(\lambda)}}\right]$$

et conséquemment

$$\text{Aire hypersphérique BMB}' = 2\pi\left[\cos^2 z - \frac{\cos z}{\sqrt{1+\lambda^2+F^2(\lambda)}}\right].$$

Cela posé, si l'on construit une autre hypersphère CNC′ d'hauteur $z+dz$, la couche hypersphérique BB′CC′ peut être regardée comme un disque d'hauteur dz, dont le volume est

$$dV = 2\pi\left[\cos^2 z - \frac{\cos z}{\sqrt{1+\lambda^2+F^2(\lambda)}}\right].dz.$$

On déduit d'ici par intégration

$$(31)\qquad V = \pi\left[z + \sin z \cos z - 2\int\frac{\cos z\,.\,dz}{\sqrt{1+\lambda^2(z)+F^2[\lambda(z)]}}\right].$$

Quant à l'espace lobatschewskien, si l'on suit un procédé tout-à-fait semblable, en partant de l'équation

$$(28')\qquad \zeta_0^2 - \text{th}^2 z\,.\,F^2(\zeta_0) - \text{th}^2 z = 0$$

analogue à la (28), on arrive à la formule finale

$$(31')\qquad V = \pi\left[2\int\frac{\text{ch}\,z\,.\,dz}{\sqrt{1-\lambda^2(z)-F^2[\lambda(z)]}} - \text{sh}\,z\,\text{ch}\,z - z\right].$$

On conclut que: *Dans le solide de révolution* $\left\{\begin{matrix}\textit{riemannien}\\ \textit{lobatschewskien}\end{matrix}\right\}$ *ayant pour méridien la courbe* (29), *on a la formule* $\left\{\begin{matrix}(31)\\ (31')\end{matrix}\right\}$, $\lambda(z)$ *étant la fonction de* z *que l'on trouve en résolvant l'équation* $\left\{\begin{matrix}(28)\\ (28')\end{matrix}\right\}$ *par rapport à* ζ_0.

Les formules (31), (31′) étendues entre les limites $z=0$ et $z=z_0$ donnent le volume de la tranche du solide limitée au bas par le plan $z=0$ et en haut par l'hypersphère d'hauteur z_0 ayant pour base ce plan.

Lorsque le méridien de la surface coupe l'axe de rotation à un point P, les formules susdites (étendues entre les limites $z=0$ et $z=\text{OP}$) donnent le volume du corps de révolution ayant pour méridien la ligne APA′. Dans ce cas on peut déterminer aussi le volume de la tranche du solide comprise entre deux

parallèles quelconques, en le regardant comme la différence de deux volumes calculables par nos formules.

Si enfin le méridien est une courbe fermée, nous sommes à même de calculer le volume de l'entier solide. A cet effet on le partage en deux ou plusieurs parties calculables par nos formules, et l'on fait ensuite la somme des volumes calculés.

§ 44

Application à la sphère. — S'il s'agit de la sphère riemannienne de rayon r, on a

$$F(\zeta_0) = \sqrt{\operatorname{tg}^2 r - \zeta_0^2},$$

et la relation (28) revient à l'autre

$$\frac{\zeta_0}{\cos z} = \frac{\operatorname{tg} z}{\cos r}.$$

Or comme l'on déduit d'ici

$$\zeta_0 = \lambda(z) = \frac{\sin z}{\cos r}$$

et conséquemment

$$F[\lambda(z)] = \frac{\sqrt{\sin^2 r - \sin^2 z}}{\cos r},$$

l'équation (31) donne

$$V = \pi(z + \sin z \cos z - 2 \cos r \,.\, \sin z). \tag{32}$$

Tel est le volume de la partie de la sphère limitée au bas par le grand cercle AOA' et en haut par l'hypersphère BMB' d'hauteur z. En faisant ici $z = r$. On a évidemment le volume de la demi-sphère.

On trouve ainsi que *le volume de la sphère riemannienne de rayon* r *est donné par la formule*

$$V = 2\pi(r - \sin r \cos r). \tag{33}$$

Dans le cas particuliers $r = \pi$, il résulte

$$V = 2\pi^2.$$

Tel est le volume de l'entier espace riemannien.

En faisant un calcul analogue dans l'espace lobatschewskien, on arrive aux formules

$$(32') \qquad V = \pi (2 \operatorname{ch} r \,.\, \operatorname{sh} z - \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z - z)$$

$$(33') \qquad V = 2\pi (\operatorname{sh} r \,.\, \operatorname{ch} r - r)\,,$$

jouant même rôle que les autres analogues (32), (33).

§ 45

Emploi des coordonnées géographiques. — Les coordonnées géographiques donnent lieu à des formules préférables en bien de cas aux formules (31), (31'), à cause de leur simplicité. Dans la figure du § 43 supposons que le méridien de la surface soit représenté par la relation

$$(34) \qquad u = F(v)$$

entre les coordonnées géographiques $OD = u$, $DB = v$ du point générique B. — Comme il résulte alors

$$\text{Aire cercle (OD)} = 2\pi (1 - \cos u) = 2\pi [1 - \cos F(v)]\,,$$

l'aire correspondante sur l'hypersphère BMB' est

$$2\pi [1 - \cos F(v)] \,.\, \cos^2 v\,.$$

Le volume de la couche limitée par la surface de révolution donnée et les deux hypersphères infiniment rapprochées BMB', CNC' a donc pour expression

$$dV = 2\pi [1 - \cos F(v)] \,.\, \cos^2 v \, dv\,.$$

La formule

$$(35) \qquad V = \pi \left[v + \sin v \cos v - 2 \int \cos F(v) \,.\, \cos^2 v \, dv \right]$$

que l'on déduit d'ici par intégration, et l'autre analogue

$$(35') \qquad V = \pi \left[2 \int \operatorname{ch} F(v) \,.\, \operatorname{ch}^2 v \, dv - \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v - v \right]$$

de l'espace lobatschewskien jouent même rôle que les formules (31), (31'); mais elles ont sur celles-ci l'avantage d'une plus grande simplicité.

On peut faire ici toutes les remarques que l'on vient de faire à la fin du § 43.

§ 46

Application au cône de rotation. — Si l'on suppose que r soit le rayon de la base (située sur le plan $z = O$) et a l'hauteur, le méridien de la surface est la droite AB du plan xz coupant les segments $OA = r$, $OB = a$ sur les axes coordonnés. Si l'espace est riemannien, cette droite a pour équation

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} r} + \frac{\operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} a} = 1 ,$$

c'est-à-dire (en introduisant les coordonnées géographiques à l'aide des formules du § 3 — I):

$$\frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} r} + \frac{\operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} a \cdot \cos u} = 1 .$$

On déduit d'ici

$$\cos u = \cos F(v) = \frac{\sin^2 r \cdot \operatorname{tg} v \pm \cos r \sqrt{\operatorname{tg}^2 a - \sin^2 r \cdot \operatorname{tg}^2 v}}{\operatorname{tg} a} ,$$

et l'équation (35) revient à l'autre

$$V = \pi \left[v + \sin v \cos v - \frac{\sin^2 r}{\operatorname{tg} a} \sin^2 v \right.$$
$$\left. \pm \frac{2 \cos r}{\operatorname{tg} a} \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 a \cos^2 v - \sin^2 r \sin^2 v} \cdot \cos dv \right] ,$$

c'est-à-dire :

$$V = \pi \left[v + \sin v \cos v - \frac{\sin^2 r}{\operatorname{tg} a} \sin^2 v \right.$$
$$\pm \frac{\cos r}{\operatorname{tg} a} \sin v \sqrt{\operatorname{tg}^2 a - (\operatorname{tg}^2 a + \sin^2 r) \sin^2 v}$$
$$\left. \pm \frac{\cos r \cdot \operatorname{tg} a}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 a + \sin^2 r}} \cdot \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 a + \sin^2 r}}{\operatorname{tg} a} \cdot \sin v \right) \right] .$$

Si l'on veut le volume de l'entier cône, il faut évidemment étendre cette formule entre les limites $v = 0$ et $v = a$; mais comme elle s'annulle pour $v = 0$, le volume du cône se ré-

duit à

$$V = \pi \left[a + \sin a \cos a \,.\, \cos^2 r \pm \sin a \cos a \,.\, \cos^2 r \right.$$

$$\left. \pm \frac{\sin a \cos r}{\sqrt{\sin^2 a + \sin^2 r \cos^2 a}} \,.\, \text{arc} \sin \left(\sqrt{\sin^2 a + \sin^2 r \cos^2 a} \right) \right].$$

Pour $a = 0$ il résulte $V = 0$, ce qui était à prévoir; mais comme il doit être aussi $V = 0$ pour $r = 0$, on a la condition

$$a + \sin a \cos a \pm \sin a \cos a \pm a = 0\,.$$

Celle-ci, pour être vérifiée, exige que, dans les termes ayant le double signe, on prenne le signe négatif. Après cela on conclut que *dans l'espace riemannien le volume du cône circulaire de rayon* r *et d'hauteur* a *est défini par la formule:*

$$V = \pi \left[a - \frac{\sin a \,.\, \cos r}{\sqrt{\sin^2 a + \sin^2 r \cos^2 a}} \,.\, \text{arc} \sin \left(\sqrt{\sin^2 a + \sin^2 r \cos^2 a} \right) \right].$$

Dans l'espace lobatschewskien on a une formule analogue.

§ 47

Les formules des §§ 43, 45 ne sont pas toujours suffisantes, à elles seules, pour calculer le volume du solide compris entre une surface de révolution et deux parallèles AA', BB'. En bien de cas elles donnent seulement le volume V' du solide compris entre le parallèle AA' et l'hypersphère BMB'; de sorte que, si l'on désigne par V'' le volume renfermé entre l'hypersphère BMB' et la portion du plan intérieure au cercle BB', on a

$$V = V' \pm V''\,,$$

le signe + valant dans l'espace riemannien et le signe — dans l'espace lobatschewskien [1].

Le calcul de V'' n'offre aucune nouvelle difficulté; on peut néanmoins s'en passer, ainsi que l'on va le démontrer.

---

[1] Cela est une conséquence de la propriété connue de l'hypersphère (§ 10) de tourner la convexité ou la concavité au plan de la base, suivant que l'espace est riemannien ou lobatschewskien.

Considérons d'abord le solide circonscrit par une surface de révolution convexe S, jouissant de ces deux propriétés :

1° que le méridien L de la surface, ainsi que toutes ses parallèles L_1, L_2, L_3, ... soient des lignes placées d'un seul côté de l'axe;

2° que la limite de la suite infinie des lignes L_1, L_2, L_3, ... soit l'axe de rotation, ou un point de cet axe.

Le volume du solide peut alors être calculé par une méthode particulière remarquable pour sa simplicité. — Nous allons l'appliquer à la sphère et au canal circulaire, les surfaces qui (de ce point de vue) constituent deux exemples typiques.

Sphère. — Σ étant une sphère de rayon r, construisons deux autres sphères Σ', Σ'' de rayons v, $v + dv$ $(v < r)$ et concentriques à Σ.

Comme l'aire de la sphère Σ' (dans l'hypothèse de l'espace riemannien) est (§ 39) $4\pi \sin^2 v$, le volume de la couche infiniment mince comprise entre les surfaces Σ', Σ'' a pour expression

$$dV = 4\pi \sin^2 v \,.\, dv \,.$$

En intégrant cette équation entre les limites $v = 0$, $v = r$, on trouve pour volume de la sphère riemannienne

$$V = 2\pi (r - \sin r \cos r)\,,$$

conformément à ce que l'on a obtenu au § 44.

Dans l'espace lobatschewskien on procède d'une façon analogue.

Canal circulaire. — C étant une tranche de canal circulaire de rayon r et d'hauteur k, on construit deux autres canaux C′, C″ de rayon v, $v + dv$ $(v < r)$, ayant en commun avec C l'axe et l'hauteur.

Ces deux surfaces C′, C″ comprennent une couche infiniment mince, dont le volume dV a pour expression

$$dV = \text{Surface de } C' \times dv\,,$$

c'est-à-dire, en rappelant les résultats du § 35

$$dV = 2\pi k \,.\, \sin v \cos v \, dv \,.$$

Il suit d'ici en intégrant entre les limites $v = 0$, $v = r$

$$V = \pi k \,.\, \sin^2 r \,. \tag{36}$$

Cette formule et l'autre analogue

$$V = \pi k \,.\, \mathrm{sh}^2 r \tag{36'}$$

de l'espace lobatschewskien, donnent le volume d'une tranche de canal circulaire non-euclidien.

Les formules (36), (36′) sont susceptibles de deux interprétations géométriques remarquables.

1° Puisque

$$\text{Aire cercle } (2r) = \begin{cases} 4\pi \,.\, \sin^2 r \\ 4\pi \,.\, \mathrm{sh}^2 r \,, \end{cases}$$

on a tout de suite: *Le volume d'une tranche de canal circulaire non-euclidien est égal à $\frac{1}{4}$ du produit de l'hauteur, par l'aire du cercle ayant le rayon double de celui de la section droite.*

Cet énoncé est évidemment applicable aussi au cylindre circulaire euclidien.

2° Si l'on divise membre à membre les équations (9), (9′) par les autres (36), (36′), et que l'on résolve les équations résultantes par rapport à V, on a le théorème:

Le volume d'une tranche de canal circulaire non-euclidien est égal au demi-produit de sa surface latérale par la tangente (circulaire ou hyperbolique) du rayon.

(À suivre.)

INDEX